EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

april
2003/nr.6
jaargang 78



CREATIEF WISKUNDEONDERWIJS
NVVW-REACTIE OP RUIMTE EN KEUZES
EXAMENBESPREKINGEN



orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

6

april 2003 JAARGANG 78

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Artikelen/mededelingen

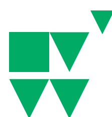
Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl



Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie verenigingsjaar 2002-2003

Leden: € 40,00
Gepensioneerden: € 25,00
Studentleden: € 20,00
Leden van de VVWL: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgend nummer.
Voor personen: € 45,00 per jaar
Voor instituten en scholen: € 120,00 per jaar
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Opzeggingen vóór 1 juli.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 15,00.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

INHOUD

265
Van de redactietafel
[Marja Bos]

266
Oud en nieuw
[Wim Kleijne]

269
40 jaar geleden
[Martinus van Hoorn]

270
Creatief wiskundeonderwijs en onderwijs aan begaafde leerlingen
[Jenneke Krüger]

275
Boekbespreking

276
Wiskunde in vazen
[Rob Bosch]

277
Correcties Euclides 78-5
[Redactie]

278
't Denken bevorderen
[Anne van Streun]

282
Basisberoepsgerichte leerweg: mag het wat anders zijn?
[Wim Kuipers]

284
WisFaq: digitale vraagbaak voor wiskunde
[Willem van Ravenstein]

286
Wiskit
[Hans Klein]

289
Aankondiging: Veelvlakkenprijsvraag

290
Vliegende veelvlakken
[Chris Zaal]

292
Leve de wiskunde! Niet alleen via websites
[Dick Klingens]

294
Van de bestuurstafel (Reactie op Ruimte en Keuzes)

300
Examenbesprekingen 2003
[Conny Gaykema]

301
Nieuws van het WereldwiskundeFonds
[Ger Limpens]

302
Recreatie
[Frits Göbel]

304
Servicepagina

Aan dit nummer werkte verder mee: Peter Boonstra.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Techniek

Deze week zat ik met een zestal meiden uit mijn atheneum-3 klas om de tafel, om te praten over hun voorlopige profielkeuzes. Het profiel N&G bleek zeer populair te zijn in dit groepje, ook bij de meiden met hoge cijfers voor de exacte vakken. Toen ik voorzichtig opperde dat N&T toch ook een mogelijkheid was, kwam onmiddellijk als reactie: 'Techniek?!? Bèèèèh!' Ze trokken er een vies gezicht bij. Nee, dat leek ze maar niks. Sááái, en bovendien vast veel te moeilijk... Trouwens, ze wilden later niks technisch gaan doen, ze wilden allemaal 'iets medisch, of in de zorg of zo'. En als je uitgeloot zou worden voor geneeskunde, kon je toch altijd nog fysiotherapie gaan doen? Nou dan.

Ik realiseerde me met een schok dat deze leerlingen niet zo zeer vielen over de *inhoud* van het N&T-profiel, maar aanhikten tegen de term 'techniek'. Natuurlijk leidt N&T mede op voor technische vervolgstudies, maar toch ook voor 'gewone' exacte studies, en in de N&T-examenprogramma's in het voortgezet onderwijs is in feite nauwelijks sprake van technische onderdelen.

Is het dan alleen de verkeerde *naam* voor dit meest uitgesproken bètaprofiel, een naam die meisjes misschien al snel afstoot? Wat zou ik zelf gedaan hebben als ik destijds als 14-jarige de keuze had gehad tussen het blijkbaar wat 'socialer' klinkende *gezondheids*profiel (dat klinkt bovendien zo vriendelijk, nietwaar) en het hardere *techniek*profiel? In het mammoetstelsel had ik die keuze niet, en misschien was dat voor veel meisjes wel een voordeel. Toen wiskunde I vervangen werd door wiskunde B, en daarnaast wiskunde A werd geïntroduceerd, zag je immers ineens het percentage wiskunde I/B-kiezers onder de meisjes scherp afnemen (zij 'weken uit' naar wiskunde A) – met als gevolg dat hun doorstroommogelijkheden naar bètastudies verkleind werden.

Maar het is toch juist *prettig* om de keuze te hebben?

Het blijft ingewikkeld.

Ruimte laten, keuzes bieden

Op de groene Verenigingspagina's vindt u de uitgebreide reactie van het bestuur van de NVvW op de voorstellen uit de notitie *'Ruimte laten en keuzes bieden in de tweede fase havo en vwo'* zoals die begin maart naar het ministerie is verstuurd. Op 19 maart jl. liet demissionair minister Van der Hoeven tijdens de jubileumdag van Getal en Ruimte alvast het volgende weten: 'Ik bekijk nog eens of het mogelijk is om voor wiskunde meer ruimte te vinden. Maar dan met name voor alle leerlingen in het profiel Natuur & Techniek. En in andere profielen meer ruimte ter keuze: we houden rekening met diep én breed. (...) U richt zich mede op de eisen van het hoger onderwijs, maar dat hoger onderwijs moet ook rekening houden met wat in het voortgezet onderwijs mogelijk is.'

Examentijd

De komende periode vragen de examens weer veel tijd en aandacht. De laatste voorbereidingen van de kandidaten, eerste en tweede correctie,... De belangstelling gaat daarbij dit jaar zeker uit naar de eerste landelijke vmbo-examens, en in het bijzonder die voor de basisberoepsgerichte leerweg. De contacten met collega's tijdens de NVvW-examenbesprekingen kunnen u wellicht ondersteunen; zie pagina 300.

Veel zakelijke informatie over de centrale examens in het algemeen is te vinden op *http://examenblad.kennisnet.nl/*. Daarnaast vindt u op *http://toetswijzer.kennisnet.nl* meer specifieke achtergrondinformatie over toetsing, examinering en evaluatie. En via *www.nvvw.nl* zullen de webbeheerders van de NVvW u natuurlijk op de hoogte houden.

Het wordt weer een spannende tijd.

OUD EN NIEUW

Over een oud en stoffig Frans schoolboekje met een verrassend moderne inhoud

[Wim Kleijne]

Een oud schoolboekje

Slenterend over een zogeheten marché d'été, een zomermarkt, in een nietig dorpje in de Corrèze in Frankrijk, werd ik tussen alle 'bric à brac' aangetrokken door dozen met oude boeken. Toen mijn vrouw op zoek ging naar leuke aardewerken potjes, was het voor mij het grootste genoegen om door die oude boeken te snuffelen.
Aldus kwam ik afgelopen zomer een beduimeld wiskundeboekje tegen dat ik voor enkele euro's in mijn bezit kreeg. De titel 'Arithmétique' en het jaartal 1923 deden mij vermoeden dat het om een traditioneel, misschien wel duf en suffig, schoolboekje zou gaan (zie figuur 1). Maar toch altijd interessant om eens kennis van te nemen. 'Arithmétique', Cours Moyen et Certificat d'Études: een wiskundeboekje dat blijkens de titel bedoeld was voor wat wij mavo of onderbouw havo noemen. Het werd geschreven door Maurice Royer en Planel Court, destijds respectievelijk inspecteur primair onderwijs en directeur van een lerarenopleiding (École Normale supérieure) waarvan de eerstgenoemde schrijver ook oud-leerling was.
Vol verwachting begon ik zo maar eens te bladeren en zag ik tot mijn verrassing dat het niet alleen om 'rekenen' (en algebra) ging, zoals de titel deed vermoeden, maar dat er ook nogal wat meetkundige figuren in stonden. Tevens sprong de indeling van het boekje in het oog: een verdeling in (genummerde) lessen. Al bladerend bleken er 154 lessen in te staan, met een verdeling over de maanden van het schooljaar. Zie bijvoorbeeld figuur 2 voor datgene wat in de maand maart zoal aan de orde moest komen.

Doelen

Ik werd door dat alles toch wel nieuwsgierig naar de verantwoording van de opzet en de inhoud van het boekje. En dus bladerde ik terug naar het voorwoord: 'Hoe het boekje gebruikt moet worden'.
De inhoud hiervan vormde voor mij de aanleiding om dit stukje over dit oude boekje te schrijven.
De schrijvers vermelden al in de eerste regels wat hun doel is en welke methode zij hierbij gebruikt hebben.
Zij wilden namelijk een boekje schrijven:
- waarin leerlingen leren om op methodische wijze wiskundig getinte situaties en voorwerpen te observeren, om het geobserveerde te vergelijken met reeds bekende zaken en om te reflecteren op het geobserveerde met het doel definities en regels te ontwikkelen en te ontdekken;
- waarmee leerlingen een goede wiskundige techniek leren;
- waarmee leerlingen voorbereid kunnen worden op de praktijk van het dagelijks leven door middel van het aanleren van exacte en moderne noties via een interessante presentatie.

Gelet op de tijd waarin het boekje is verschenen, is dat toch wel heel verrassend. Let wel, we spreken over 1923, waarin de 7^e editie van dit boekje verscheen. Het zijn dus ideeën die rond of vóór de eerste wereldoorlog ontwikkeld zijn door de schrijvers.

Herkenning

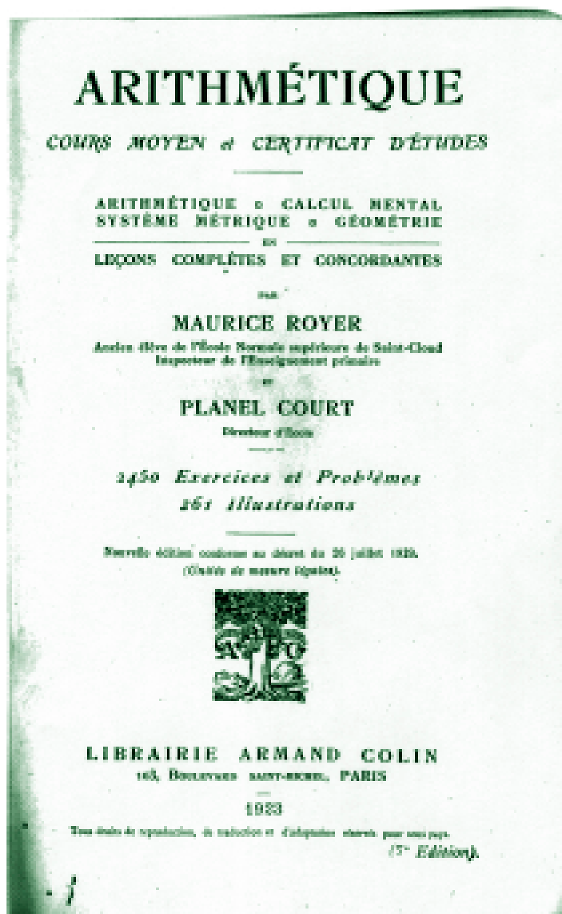
Herkennen we in deze punten niet wat wij momenteel hoog in het vaandel hebben staan? Zien we hierin niet in rudimentaire zin al verwoord wat we tegenwoordig ‘constructief leren’ noemen? Wij zijn er immers op gespitst om met onze leerlingen uit reële, realistisch aandoende, althans voor leerlingen bekende en vertrouwde situaties, wiskunde te construeren. De opvatting ‘wiskunde is mensenwerk’ vormt toch één van de pijlers van modern wiskundeonderwijs!
Ik vind het altijd weer prachtig om te ontdekken dat wat wij tot ónze verworvenheden rekenen, al in vroeger tijden aanwezig was, weliswaar in andere vorm misschien, maar toch. Het leert je bescheidenheid en het richt je aandacht op en bewondering voor hen die ons voorgingen. Wij staan ook hierin als het ware op de schouders van onze voorouders.
Nieuwsgierig gemaakt las ik verder en verbaasde me een paar regels verder opnieuw: ‘Les leçons d’arithmétique, de calcul mental, de système métrique, de géométrie ne sont pas dans des chapitres isolés formant autant de livres distincts.’
De bedoeling was dus een geïntegreerde presentatie en behandeling van de verschillende wiskunde-onderdelen te geven. Geen aparte en geïsoleerde hoofdstukken voor rekenen-algebra, hoofdrekenen, het metrieke stelsel en meetkunde, maar ‘en parfaite concordance dans l’ordre même où il convient de les faire et de les étudier’. Alles bij elkaar een behoorlijk moderne benadering van de wiskundedidactiek.

Praktische uitwerking

Tussen bedoeling en werkelijkheid kan nog wel eens wat licht zitten. Daarom is het zaak, naar de inhoud van de lessen zelf te kijken om te zien in hoeverre de verwoorde idealen in praktijk gebracht zijn. En inderdaad begint vrijwel elke les met ‘exercices d’observations, des images, des figures, des problèmes familiers, des exemples pratiques’, kortom met een realistisch aandoende situatieschets, ofwel met de presentatie van een wiskundige context. Bijvoorbeeld in les 87 over de omtrek van een cirkel; zie figuur 3.

Na de observatieschets, de observatieoefening, volgen enige problemen ter oplossing, verdeeld in formeel wiskundige vragen, enige praktische problemen en enige toepassingen uit de praktijk van het dagelijks leven. Een aantal van deze problemen heeft een min of meer open karakter, ruimte gevend voor meerdere oplossingen; in ieder geval veel opener en veel meer ruimte biedend dan we vaak denken dat het geval was in deze oude situaties. Datzelfde geldt voor het ‘doe-karakter’ van een aantal opgaven. Ook in deze punten toch weer wat moderne karakteristieken; zie de afgedrukte opgaven in figuur 4.

FIGUUR 1


ARITHMÉTIQUE

COURS MOYEN et CERTIFICAT D'ÉTUDES

ARITHMÉTIQUE ◦ CALCUL MENTAL
SYSTÈME MÉTRIQUE ◦ GÉOMÉTRIE
EN
LEÇONS COMPLÈTES ET CONCORDANTES

PAR

MAURICE ROYER

ET

PLANEL COURT

2450 Exercices et Problèmes
261 Illustrations

LIBRAIRIE ARMAND COLIN
103, BOULEVARD SAINT-MICHEL, PARIS

1933

(5e Édition).

FIGUUR 2


239

MARS

SOMMAIRE DU MOIS

ARITHMÉTIQUE: Les nombres complexes et les problèmes sur les courriers. — Les grandeurs proportionnelles. — Règle de trois. — Le tant pour cent.

CALCUL MENTAL: Application des procédés étudiés aux calculs sur les nombres complexes, le tant pour cent, les mesures de poids, la mesure des arcs.

SYSTÈME MÉTRIQUE: Les mesures de poids et les pesées. — Relations des volumes, des capacités et des poids.

GÉOMETRIE: Longueur de la circonférence. — Les degrés de la circonférence et des arcs.

Heden en verleden

Het is natuurlijk niet mijn bedoeling om hier een boekbespreking te schrijven. Het enige dat ik met dit artikeltje beoog, is aan te geven dat de wortels van wat ís al in het verleden te traceren zijn. Bewondering en respect voor de oude schrijvers die dezelfde intentie hadden als wij nu. De keuzes die de schrijvers van dit boekje daarbij gemaakt hebben, lijken verrassend veel op de onze.

Uiteraard vertoont het boekje alle tekenen van de tijd waarin het is ontstaan en is het daardoor gedateerd. Desondanks kunnen we ook nu de schrijvers volmondig nazeggen:

‘Notre désir serait d’avoir réussi à présenter aux enfants un livre agréable à feuilleter et à étudier, riche d’enseignements et cependant simple et très clair, *de bon usage*.’

Over de auteur

Drs. Wim Kleijne (e-mailadres: w.kleijne@owinsp.nl) is wiskundige, oud-docent wiskunde en momenteel coördinerend inspecteur van het onderwijs.

FIGUUR 3

LA CIRCONFÉRENCE

276. — Exercices d'observation. — Les roues d'une automobile, d'une voiture, d'un cerceau, un bassin, etc., ont la forme d'une *circonférence* (fig. 174).

Pour tracer une circonférence sur le sol, le jardinier attache un piquet aux deux extrémités d'un cordeau. L'un est fixé au point O, l'autre A décrit la circonférence (fig. 175).

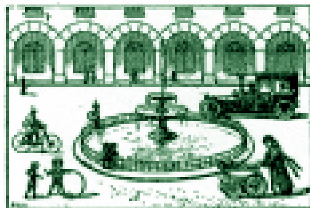


Fig. 174. — Une place publique.

La circonférence est une ligne courbe fermée dont tous les points sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre de la circonférence.

Le cercle est la surface comprise dans la circonférence.

Si l'on joint un point de la circonférence au centre, on obtient un *rayon*.

Tous les rayons sont égaux.

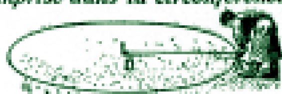


Fig. 175. — Tracé au cordeau.

FIGUUR 4

910. — Plier et partager un ruban de papier en 8 parties égales. Montrer une partie du ruban; 3 parties; 5 parties. Énoncer et écrire ces trois fractions du ruban de papier. Quel est le numérateur de chaque fraction? le dénominateur? Qu'indiquent-ils?

935. — Mesurer la longueur de l'arête d'une caisse à biscuits cubique. Calculer le volume de cette caisse.

1366. — Construire un carré de 3^{cm} de côté et trouver le centre. Tracer une circonférence tangente aux 4 côtés du carré. De chacun des sommets du carré, comme centre, tracer un quart de circonférence ayant même rayon. Achever le dessin en décrivant au milieu une petite circonférence tangente à ces 4 arcs.

1367. — Tracer une circonférence de 15^{mm} de rayon, tangente à l'extrémité d'une droite de 4^{cm}.

1582. — Peser un objet en employant le moins de poids possible.

1346. In een cirkel met een straal van 26 mm beschrijft men drie even grote cirkels, die elkaar en de grote cirkel raken; in elk van de drie beschrijft men er weer drie, enz. Gesteld, dat men hiermee zou kunnen doorgaan totdat de som van de omtrekken van alle cirkels 5 km overtreft, hoeveel verschillende grootten hebben de cirkels dan in de figuur? Bereken tevens het totale aantal van alle cirkels in deze grootten.

P. Wijdenes, Lagere Algebra II, 7e druk, § 85 vb. 5).

1347. Van de raaklijnenvierhoek ABCD is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel; de raakpunten op AB, BC, CD en DA zijn opv. E, F, G en H. Bewijs:

a. I en de middens van AC en BD zijn collineair.
b. AC, BD, EG en FH zijn concurrent.
c. Als EG, BC en DA concurrent zijn, zijn FH, AB en CD het ook.

1348. Van de rechthoek ABCD is $AB = \sqrt{2}$ en $AD = 1$; P is een willekeurig punt van de halve cirkel op AB als middellijn, die buiten de rechthoek ligt. De snijpunten van PD en PC met AB zijn opv. E en F. Bewijs: $AF^2 + BE^2 = AB^2$.

P. Fermat (1601–1665).

1349. In de kubus ABCD–EFGH is P het midden van AE en Q dat van AB.

a. Bewijs: $BP \perp FQ$.
b. Construeer de lijn x, die FQ en BC loodrecht kruist en FC en PH snijdt.
c. Het snijpunt van PH en x is S. Bereken PS : SH.
d. Construeer door E de lijn y, die x en CG snijdt.

(Gymnasia 1962).

1350. Het grondvlak van de piramide T–ABCD is een vierkant met zijde 6; $\triangle$ TAD is gelijkzijdig; de projectie van T op het grondvlak ligt op AD; P is het midden van TC.

a. Bereken de sinus van de hoek van AC en het vlak TCD.
b. Bewijs: $TD \perp BP$.
c. Bereken de afstand van TD en BP.
d. Bereken de inhoud van het viervlak BTDP.

(Gymnasia 1962).

1351. Gegeven is: $A = \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + p$, $B = \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha + p$ en $C = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + p$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$; $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ en $p \geqq 0$. Bewijs: $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \leqq \sqrt{3 + 9p}$.

Vraagstukken uit het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, jaargang 50 (1962-1963)

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

CREATIEF WISKUNDE-ONDERWIJS EN ONDERWIJS AAN BEGAAFDE LEERLINGEN, VERSLAG VAN EEN CONFERENTIE

Wat is creatief wiskundeonderwijs? Is creatief wiskundeonderwijs alleen van belang voor begaafde leerlingen? Twee vragen die bij mij opkwamen in een vliegtuig op weg naar een conferentie in Riga.

[Jenneke Krüger]

Conferentie

In juli 2002 bezocht ik de internationale conferentie 'Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students'. Mijn deelname was mogelijk dankzij financiële steun van de SLO in Enschedé, in het kader van een meerjarig project 'Hoogbegaafde leerlingen in de basisvorming', waarvan wiskunde een deelproject is.
De eerste conferentie over creatief wiskundeonderwijs en onderwijs aan begaafde leerlingen vond plaats in Münster in 1999, onder leiding van professor Hartwig Meissner. De conferentie in Riga was de tweede, onder leiding van professor Agnis Andzans van de Universiteit van Letland. Achter beide conferenties staat een programmacomité bestaand uit zes hoogleraren uit Australië, Canada, Duitsland, Finland, Letland en de V.S.
Deze conferentie was kleinschalig wat betreft het aantal deelnemers, ongeveer 40, waardoor het mogelijk was met iedereen in contact te komen. Omdat er bijdragen waren uit 19 verschillende landen kregen we toch een breed overzicht van denkbeelden over creativiteit en werkwijzen in de verschillende onderwijssystemen, van Estland tot Nieuw-Zeeland, van de VS tot Rusland.
Mijn bijdrage was een poster waarmee ik iets vertelde over de situatie in Nederland op het gebied van begaafde leerlingen in het voortgezet onderwijs, en met name inging op het werk van de SLO en de Stichting Vierkant in het kader van bovengenoemd project.
Hoewel alle bijdragen op de een of andere manier te maken hadden met ontdekken en/of stimuleren van wiskundige creativiteit bij begaafde leerlingen, kon er toch een onderscheid gemaakt worden. Verreweg de meeste bijdragen richtten zich op één van twee onderwerpen. Een groep sprekers concentreerde zich op wiskundewedstrijden, een tweede, grotere groep legde de nadruk op creativiteit, vaak met voorbeelden van onderwijs dat wiskundig begaafde leerlingen zou moeten stimuleren. Van beide onderwerpen volgt een aantal voorbeelden.
Een aantal deelnemers probeerde creativiteit te omschrijven of voorwaarden voor creatief gedrag te geven, ongeacht of men over wedstrijden sprak of over andere aspecten (zie figuur 1).

Olympiades en andere wedstrijden

Simplificerend kun je zeggen dat er twee groepen wiskundewedstrijden zijn: Olympiades (samen met de wedstrijden die daarvoor trainen) en 'makkelijke' wedstrijden. Die laatste hebben als belangrijke doelstelling een grote groep leerlingen wiskunde als een plezierige activiteit te laten ervaren. Een voorbeeld hiervan is de Kangoeroewedstrijd, zoals die ook in ons land aangeboden wordt.

Een korte bespreking van het belang dat aan wedstrijden gehecht wordt en de manier waarop er mee omgegaan wordt, volgt hier voor Letland, Finland en Australië.

In een relatief klein land als Letland (2,4 miljoen inwoners) vormen wedstrijden één van de middelen om richting te geven aan vorm en inhoud van het wiskundeonderwijs. Er is dan ook een uitgebreid systeem van wiskundewedstrijden, door het jaar heen en voor bijna alle leeftijden, waarbij universiteit en scholen goed lijken samen te werken. Er zijn Olympiadewedstrijden op het niveau van school, regio en staat. Alle wedstrijdopgaven worden geproduceerd door medewerkers van de universiteit. Volgens professor Andzans genieten Olympiades groot aanzien; ze worden niet alleen door leerlingen en docenten heel serieus genomen, maar ook door universiteits-medewerkers en vertegenwoordigers van de regering. Er zijn ook andere wedstrijden op verschillende niveaus. Bovendien is er een aantal ondersteunende activiteiten voor leraren, meestal georganiseerd door de universiteit. Door dit alles lijkt het inderdaad waarschijnlijk dat de vele wedstrijden invloed hebben op de inhoud van het onderwijs. In het kader van dit artikel voert het te ver, hierop uitgebreid in te gaan.

In Finland hoopt men door middel van het organiseren van Olympiades verborgen wiskundige talenten te stimuleren en belangstelling van leerlingen voor wiskunde te verhogen, met name ook van meisjes. Ook veronderstelt men dat docenten zich meer in wiskunde zullen gaan verdiepen als hun leerlingen aan Olympiades meedoen, en men hoopt de inhoud van het programma in het voortgezet onderwijs te beïnvloeden. Matti Lehtinen (National Defence College, Helsinki) vertelde over successen en mislukkingen sinds 1955, het eerste jaar waarin een nationale Olympiadewedstrijd georganiseerd werd (5 deelnemers). Wat betreft stimulering van studenten lijkt de opzet geslaagd: er zijn netwerken van wiskundig begaafde leerlingen en studenten ontstaan, en een behoorlijk aantal van de leerlingen kiest een wiskundig georiënteerde studie. Docenten echter tonen nog steeds weinig belang-stelling voor wiskundewedstrijden. Het blijft moeilijk om ze bij organisatie en training te betrekken, misschien omdat ze veel niet-onderwijstaken hebben. Het wiskundeprogramma in het voortgezet onderwijs is nog steeds breed en tamelijk oppervlakkig, volgens professor Lehtinen.

In Australië worden veel relatief gemakkelijke wed-strijden georganiseerd. De opgaven worden vaak in een context gebracht. Voor getalenteerde leerlingen is er gelegenheid mee te doen aan Olympiades. Zowel de wedstrijden als de trainingen daarvoor worden georganiseerd met behulp van docenten. Peter Taylor, voorzitter van de Wereld Federatie van Nationale Wiskunde Wedstrijden (WFNMC), noemde een aantal voordelen van wiskundewedstrijden.
- Iedereen kan meedoen, aangezien er verschillende niveaus van moeilijkheid zijn.
- Er is niet de druk om een goed cijfer te moeten halen.
- Leerlingen krijgen met een ander type wiskunde-problemen te maken dan ze in hun schoolboeken vinden; dat stimuleert creativiteit.
- Vooral de wedstrijden met contextrijke opgaven vormen een bron van materiaal voor docenten.

Waar 'makkelijke' wedstrijden het idee van wiskunde als een leuke bezigheid voor iedereen zouden stimuleren, kunnen Olympiades een hulpmiddel zijn om begaafde leerlingen op te sporen. Deelname is, voor zover ik kan nagaan, overal vrijwillig. Wat verschilt per land is de 'cultuur'. Daarmee bedoel ik zaken als: hoe vanzelfsprekend en/of belangrijk is het voor leerlingen, hun leeftijdsgroep, de volwassenen om hen heen om met wedstrijden mee te doen, welke faciliteiten worden geboden, welke aandacht wordt er buiten school aan besteed?
De vraag hoe succesvol wiskundewedstrijden zijn in het opsporen en aanmoedigen van wiskundig begaafde jongeren is moeilijk te beantwoorden.
Niet alle (hoog)begaafde leerlingen vinden het mee-doen aan Olympiade-achtige wedstrijden zo leuk dat ze zich daarvoor inzetten. Wel lijkt een grote mate van creativiteit kenmerkend voor begaafde leerlingen.

Creativiteit

Een groot aantal sprekers legde de nadruk op andere zaken dan wedstrijden. Ik geef enkele voorbeelden uit Nieuw-Zeeland, Letland, Duitsland en Japan.

Vanuit Nieuw-Zeeland (University of Otago) was Coralie Daniel aanwezig om te vertellen over haar onderzoek van en met tien begaafde leerlingen, gekozen uit een groep die trainde voor de Inter-nationale Wiskunde Olympiade.
Zij heeft ervaren dat een belangrijke hinderpaal voor goed functioneren van deze hoogbegaafden wordt gevormd door het verschil dat de laatste eeuwen is ontstaan tussen wiskundige taal en dagelijkse omgangstaal. In veel westerse landen is het sociaal acceptabel je er op voor te laten staan dat je van wiskunde niets begrijpt. Als gevolg hiervan kunnen wiskundig hoogbegaafden het gevoel krijgen dat ze heel afwijkend zijn en zich daardoor geïsoleerd voelen. Coralie wees er op dat:
- mensen in hun leven de wiskunde ontwikkelen die ze nodig hebben;
- ook eenvoudige wiskunde kan leiden tot creatieve en filosofisch waardevolle ideeën;
- het uitdrukken van wiskundige ideeën niet alleen in wiskundige symbolen maar ook door visuele beelden kan leiden tot een enorme verbetering van het cognitieve begrip.
Ze pleitte ervoor de resultaten van onderzoek met wiskundig hoogbegaafde leerlingen niet alleen te publiceren in wetenschappelijke tijdschriften, in wetenschappelijke taal, maar deze ook op een minder academische, meer aansprekende manier onder de aandacht van een wijder publiek te brengen, zodat ook niet-wiskundigen zich aangesproken voelen. Coralie voegde de daad bij het woord door wat van haar andere

Hartwig Meissner, Duitsland	Creativity of students shows in independence, relative originality, specific abilities, social interaction, human attitudes.
Coralie Daniel, Nieuw-Zeeland	[Creativity is] the ability and inclination to think about links between apparently different things, experimenting, thinking laterally, conceptualising and adapting ideas, allowing prior learning to influence other ideas, enjoying interaction and discussion with others.
Matti Lehtinen, Finland	Mathematical giftedness is a prerequisite for mathematical creativity.
John Threlfall en Peter Pool, Engeland	Creativity may be using familiar skills and knowledge in a way that is unfamiliar to the user.
Daima Taimina, V.S.	Creative thinking is a cognitive activity that results in one or more novel solutions for a problem.
Shin Wanatabe, Japan	Creativity and thinking are cultivated by actions with real things.

FIGUUR 1 Uitspraken van deelnemers over creativiteit en wiskunde

Problem groups
Dissections and rearrangements

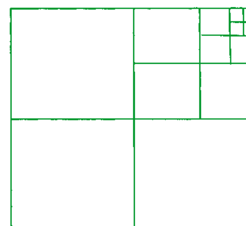
Problem. *Is it possible to cut a square with the length of its side of 1km into*

a) 31 square;

b) 30 squares ,

so that the length of the side of one of the squares does not exceed 1m.

Solution a)



square - $3\cdot 10 + 1 = 31$, length of the side of one of squares $< 2^{10} = 1024$

Development of experimental skills

Geometrical games

A rectangle 11x2002 is given. The game is played by two players who move alternately. By one move it is allowed to paint any blank square in the given rectangle (the side of the square is an integer). He who cannot move loses. Develop the wining strategy for the first player.

FIGUUR 2 Voorbeelden van Ilze France, voor 12- en 13-jarigen

werk te laten zien en enkele verhalen erachter te vertellen, ervaringen met wiskundig hoogbegaafde jonge mensen. Dat andere werk bestaat uit textiele kunstwerken. Coralie ontwerpt en maakt ‘scarves’, met als voornaamste technieken breien, haken en applicatie. Haar werk is gebaseerd op wiskundige thema’s. Een aantal werkstukken was geïnspireerd door de leerlingen met wie ze gewerkt heeft en over wie ze vertelde.

Er was uiteraard een aantal sprekers namens de Universiteit van Letland, ook docenten. Een van die sprekers was Ilze France.
Er wordt in Letland veel aandacht besteed aan meetkunde, waarbij men dwarsverbindingen wil leggen met onderwerpen zoals combinatoriek, verzamelingenleer en rekenen. Ilze liet een aantal voorbeelden zien van opgaven voor begaafde leerlingen van 12 en 13 jaar. Wiskundig en didactisch goed doordacht lesmateriaal, waarbij systematisch aandacht besteed wordt aan het ontwikkelen van begrip en aan onderzoeksvaardigheden (zie figuur 2).

Karin Richter (University of Halle, Duitsland) gaf een mooi voorbeeld van een serie lessen gebaseerd op oude meetinstrumenten, met een open vraagstelling. Naar aanleiding van afbeeldingen van oude meetinstrumenten stelde ze simpele vragen, zoals:
- *Hoe werkt het?*
- *Op welke manier werd het gebruikt?*
- *Zijn er andere oude meetinstrumenten waarmee je het kunt vergelijken?*
Dit resulteerde in onderzoekjes waarbij nieuwe vragen opkwamen en beantwoord werden, door groepjes samenwerkende leerlingen. Een prachtig voorbeeld van geschiedenis van de wiskunde als lesmateriaal, maar ook van samenwerkend leren en van zelfstandig leren.

Shin Watanabe (Tokai Universitu, Japan) vindt dat met de handen bezig zijn de ontwikkeling van wiskundig denken kan bevorderen. Hij voegde de daad bij het woord door iedereen aan het werk te zetten met papier en schaar. Het doel was, een model van een voetbal te maken met behulp van 20 papieren zeshoeken (de vijfhoeken worden gevormd door de lege ruimte tussen zeshoeken; zie figuur 3). Heel motiverend om te doen, er ontstaat spontaan samenwerking, vooral tussen de minder handvaardigen, en er zit behoorlijk wat wiskunde in.

Tests en creativiteit

Kunnen landelijk afgenomen tests creativiteit onder leerlingen bevorderen?
John Threlfall en Peter Pool (University of Leeds, UK) vinden van wel. Ze ontwikkelen sinds kort toetsen binnen het project World Class Tests, met als doel de top 10% van wiskundige talenten in school te ontdekken. De opgaven worden zo ontworpen dat bekende wiskunde op een nieuwe manier toegepast moet worden om tot een oplossing te komen. Leerlingen moeten dus creativiteit vertonen om tot oplossingen te komen.
Deelname is niet verplicht. De toetsen worden afgenomen sinds november 2001, bij 9- en 13-jarigen. De deelnemers hebben een uur voor ongeveer 15 opgaven (zie figuur 4). De test wordt aangeboden in Groot-Brittannië, V.S., Australië en Hongkong[1].

- Zorg voor 20 gelijkzijdige papieren driehoeken in drie verschillende kleuren, verdeeld als 7, 7, 6. Bijvoorbeeld 7 rode, 7 gele en 6 groene driehoeken.
- Vouw de driehoeken tot regelmatige zeshoeken.
- Vijf zeshoeken aan elkaar geplakt omringen een vijfhoek; dat is het begin van de voetbal.
- *Er mogen geen zeshoeken van dezelfde kleur aan elkaar grenzen.*
- Ga door tot je het model van een voetbal hebt, waarbij dus aangrenzende zeshoeken verschillend van kleur moeten zijn.
- Een moeilijker opgave ontstaat als je de aantallen 6, 6, 8 neemt.

FIGUUR 3 De workshop van Shin Wanatabe

1. A sequence of seven numbers has a total of 49. Each number is 6 less than the one before it. What is the first number of the sequence?

2. Work out the percentage of the multiples of 4 that end in '4'.

FIGUUR 4 Twee voorbeelden van testvragen voor 13-jarigen (World Class Test)

Hoewel de tests nog maar kort op de markt zijn, is er een groeiende vraag van docenten naar de opgaven - niet in de eerste plaats als testmateriaal, maar als lesmateriaal. Dit vanwege het uitdagende, creatief denken bevorderende karakter van veel van de opgaven.

Bovenstaande voorbeelden vormen een bescheiden selectie uit het aanbod op de conferentie.
Ik heb niets verteld over samenwerking tussen universiteiten en docenten in Israël, over wiskundige creativiteit bij studenten basisschoolleraar in Duitsland, over uitbeelden van vormen in hyperspace, over CCG-visualisatie, over het gebruik van computeralgebra bij open meetkundige problemen, enzovoorts. Wie meer wil weten over het aanbod kan mij altijd een mailtje sturen.

De situatie in Nederland

Hoe is het in Nederland gesteld met creativiteit en wiskundeonderwijs en met het signaleren en stimuleren van wiskundig begaafde leerlingen?
In het kader van dit artikel is een grondige vergelijking van landen en onderwijssystemen niet mogelijk. Het blijft bij indrukken.

Wiskundewedstrijden kennen we ook in Nederland, zowel Olympiades als andere wedstrijden. Voor alle scholen zijn de Olympiade, de Kangoeroewedstrijd, de Alympiade en de Wiskunde B-dag. Er zijn universitaire competities en de Pythagoras Olympiade. Dat lijkt heel wat, maar voor zover ik weet trekken met name de Olympiades niet zoveel belangstelling. Het is zeker niet zo dat het voor de meerderheid van scholen vanzelfsprekend is dat leerlingen meedoen. Ondersteuning van docenten die zich binnen school hiervoor willen inzetten is geen vanzelfsprekende zaak.

Creativiteit in het wiskundeonderwijs - daarbij kun je denken aan docenten, materiaal, lesvormen, sfeer in een school.
Veel goede voordrachten kwamen uit landen waar een goede samenwerking lijkt te bestaan tussen universiteiten en docenten. Ik denk dat een goede samenwerking in dit geval wederzijdse beïnvloeding inhoudt.
In Nederland lijkt weer meer contact te groeien tussen universiteiten en scholen, vooral de scholen in de naaste omgeving van een universiteit. In hoeverre er sprake is van wederzijdse beïnvloeding is niet duidelijk.

Wat betreft docenten is in ons land de basisvorming het domein van docenten met een tweedegraads opleiding, niet het gebied waar universiteiten geneigd zijn zich mee te bemoeien. Juist in die leeftijdsgroep is het belangrijk wiskundige begaafdheid te signaleren, of, als dat al in het basisonderwijs gebeurd is, er goed op in te spelen. In de tweedegraads lerarenopleidingen zou meer aandacht besteed moeten worden aan creativiteit en begaafde leerlingen. Zoals Hartwig Meissner (Universiteit van Münster) in zijn betoog opmerkte: 'We need creative teachers and teachers who stimulate and further creative thinking in their classroom. But creativity cannot be taught... We only can help future teachers to become consciously aware of creativity. We can enhance motivation, curiosity, self-confidence and thus *flexible modes of thinking*'. (Cursivering van mij.) Docentenopleidingen schieten hier in het algemeen tekort.

Er zijn gelukkig docenten die, al dan niet aangemoedigd en gefaciliteerd door de schoolleiding, aandacht besteden aan begaafde leerlingen. Dat kan in vele vormen: projecten, versnellen en verdieping, compacten en verrijken, keuzelessen, of welke andere vorm dan ook.
Vaak zijn die docenten nogal geïsoleerd bezig. De SLO heeft daarom een begin gemaakt met een netwerk van en voor docenten die met (hoog)begaafde kinderen in hun school werken. Men kan zich opgeven voor deelname aan het netwerk via een website[2].

Materiaal voor extra activiteiten is er wel te vinden, maar verspreid.
De Stichting Vierkant voor Wiskunde biedt op haar site materiaal aan voor gebruik door wiskundeclubs[3], maar ook voor gebruik in de klas, als materiaal voor leerlingen die iets extra's met wiskunde willen doen.
Een paar jaar geleden is in het kader van Compacten en Verrijken door de stichting Perdix (Voortgezet Onderwijs aan Hoogbegaafde Leerlingen, IVLOS, Universiteit van Utrecht) wiskundig lesmateriaal ontwikkeld voor gebruik in de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs[4].
Er is een aantal wedstrijden, o.a. de Kangoeroewedstrijd, A-lympiade en Olympiade.
De SLO heeft op haar site een aantal pagina's met materiaal en ideeën voor begaafde leerlingen[5]; dit onderdeel is nog in opbouw.
Een aantal activiteiten is gebundeld in Wiskids[6], een (tijdelijk) project waarin meerdere instellingen en personen actief zijn en dat als doelstellingen heeft het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongeren van 10 jaar en ouder en het verbeteren van het imago van wiskunde.
Er zijn veel websites, vaak Engelstalig, waar interessant wiskundig materiaal te vinden is.

Er zijn dus allerlei activiteiten waar een docent de leerlingen aan mee kan laten doen, er is het een en ander aan materiaal te vinden, er bestaat gelegenheid aan wedstrijden mee te doen.
In welke mate initieert en ondersteunt de regering aandacht voor begaafde leerlingen? Het blijft over het algemeen bij een beetje subsidie voor een project hier, een project daar. Het wekt niet de indruk dat men bij het ministerie veel belang hecht aan het signaleren en stimuleren van (hoog)begaafde leerlingen.

Creatief wiskundeonderwijs

Van het grootste belang is mijns inziens nog steeds de docent, de creativiteit van de docent in de wiskundelessen, de houding van de docent ten opzichte van begaafde leerlingen. Is de docent in staat begaafde leerlingen te signaleren, zowel de lastige leerling als de rustige, onopvallende? Daarnaast is van belang wat de houding van het schoolmanagement is in deze. Hoe belangrijk vindt het schoolmanagement aandacht voor begaafde leerlingen, welke faciliteiten biedt de school aan docenten en leerlingen?
Docentenopleidingen zouden meer aandacht dienen te besteden aan creativiteit, aan het signaleren van en omgaan met begaafde leerlingen. Het ministerie van OCenW en eventueel dat van Economische Zaken zouden er verstandig aan doen in woord en daad te laten merken dat ze meer aandacht voor begaafde leerlingen belangrijk vinden.

Ik ben dit artikel begonnen met het stellen van twee vragen.
- Wat is creatief wiskundeonderwijs?
In ieder geval moet dat onderwijs mijns inziens de individuele leerling aanzetten tot zelf nadenken over wiskunde, gebruiken van wiskunde en ontwikkelen van (voor de leerling) nieuwe ideeën.
- Is creatief wiskundeonderwijs vooral van belang voor begaafde leerlingen?
Ik wens alle leerlingen creatief wiskundeonderwijs toe. Maar om begaafdheid tot zijn recht te laten komen is creatief wiskundeonderwijs broodnodig.

Naschrift

In 2003 wordt deze conferentie in Bulgarije gehouden. De organisator zou graag zien dat deze keer ook studenten, met name van lerarenopleidingen, deelnemen. Informatie bij mrs. E. Velikova, e-mailadres: *orgcommittee1@yahoo.com*

Websites

[1] www.worldclassarena.org
[2] http://listserv.slo.nl/mailman/listinfo/wisenslim
[3] www.vierkantvoorwiskunde.nl/wiskundeclubs
[4] www.ivlos.uu.nl
[5] www.slo.nl/vo/hoogbegaafdheid
[6] www.wiskids.nl

Over de auteur

Jenneke Krüger (e-mailadres: j.kruger@slo.nl) werkt sinds 2001 bij de afdeling Voortgezet Onderwijs van de SLO, Enschedé. Daarnaast geeft ze lessen wiskunde en ANW in de Tweede Fase afdeling van een brede scholengemeenschap in Zwolle. Ze is o.a. lid van de werkgroep havo/vwo van de NVvW.

Boekbespreking / Werken aan academische vorming; ideeën voor actief leren in de onderwijspraktijk

Auteurs: Jaap Milius, Heinze Oost, Wes Holleman Uitgever: IVLOS, Universiteit Utrecht,

Postbus 80127, 3508 TC Utrecht (2de druk februari 2001) ISBN 90 393 2616 9 • prijs € 15,00 [Lonneke Boels]

Inleiding

In mijn zoektocht naar werkvormen geschikt voor het studiehuis in de bovenbouw van havo en vwo stuitte ik op het boek 'Werken aan academische vorming'. De ideeën in dit boek bleken zeer bruikbaar in mijn lessen, vandaar deze boekbespreking. Het boek geeft veel praktijkvoorbeelden afkomstig van verschillende faculteiten van de Universiteit van Utrecht. Het doel van het boek is deze voorbeelden beschikbaar stellen voor een breed onderwijspubliek. Het boek is opgesplitst in drie delen.

Werkvormen

In deel 1 worden voorbeelden van verschillende onderwijsvormen gegeven die passen bij de didactiek van actief leren, bijvoorbeeld van werkvormen om een doceergedeelte van een les te onderbreken. Voorbeelden daarvan zijn: aantekeningen doornemen van een ander, noteren van vragen, stellen van vragen, maken van controlevragen, etc.
Een andere werkvorm heet 'plussen en minnen'. Deze werkvorm is geschikt voor de start van een praktische opdracht of eventueel profielwerkstuk, maar kan ook gebruikt worden voor een vragenles voorafgaand aan een toets. De leerlingen noteren dan op een kaartje hun dringendste vraag en op een tweede kaart dat waar ze het meest tegenop zien of waar ze het meest moeite mee denken te hebben. Tot slot noteren ze op een nieuw kaartje waar ze het minst tegenop zien. Deze kaartjes plakken de leerlingen in drie kolommen op het bord. In de beschreven werkvorm gaan studenten de kaartjes in tweetallen zelf ordenen. Voor een eerste keer zou ik dat overigens zelf iets anders aanpakken, en wel door de eerste twee soorten kaartjes klassikaal te ordenen.
Maar ook het idee van rondschrijven is – wellicht met wat veranderingen – toepasbaar in een wiskundeles. Rondschrijven is een werkvorm waarbij de docent een veelomvattend en complex probleem schetst met theoretische en maatschappelijke achtergronden. Leerlingen bedenken hierbij zelf een onderzoeksvraag. Vervolgens schrijft een leerling drie ideeën over het onderzoek op. Daarna schuift hij het formulier door naar een medeleerling die er ook drie nieuwe ideeën bijschrijft. Zo gaat dit een tijdje door. Deze werkvorm kan bij wiskunde worden gebruikt als aanzet voor een praktische opdracht, maar ook als huiswerkbespreking of bespreking van een complexe opgave. Een leerling zet dan één vraag op papier. Medeleerlingen zetten er hints op of SPA's zonder de oplossing of het benodigde algoritme weg te geven.
Zo staat het boek vol met allerlei nuttige werkvormen die u naar eigen inzicht kunt gebruiken of aanpassen.

Toetsen en beoordelen

In deel 2 worden toets- en beoordelingsvormen besproken die aansluiten bij de didactiek van actief leren.
Heel nuttig voor mijn wiskundelessen vind ik zelf het onderdeel 'individuele beoordeling bij groepswerk'. Ook worden alternatieve toetsvormen gegeven. In plaats van een essay kan bijvoorbeeld gevraagd worden een adviesbrief te schrijven aan de minister in antwoord op kamervragen, een 'review' over een recent verschenen boek, een ingezonden brief voor een krant, een becommentariëring van een artikel, etc. Samenwerking met de vaksectie Nederlands ligt dan voor de hand.
Verder wordt ook het tentamen-met-overleg behandeld, een toetsingsvorm die al eens beschreven is door Lidy Wesker in de Nieuwe Wiskrant. Hierbij mogen de studenten of leerlingen met elkaar overleggen. In het voorbeeld van het boek gaat het om pittige meerkeuzevragen naar aanleiding van het college. Ik pas het zelf wel eens toe in de vorm van een groepstoets. Leerlingen hebben dan ruim twee weken in een groep van vier samengewerkt en krijgen een toets met vier complexe opgaven waarbij ze binnen hun groep mogen overleggen, en waarbij ze als groep één antwoord moeten inleveren.

Vormen van leren

Deel 3 tot slot is een nabeschouwing van de didactiek van ervaringsleren, beroeps- en competentiegericht leren en cursorisch leren. Het is tevens een verantwoording waarom de voorbeelden uit deel 1 inderdaad goede voorbeelden zijn.

Aanrader

Het boek is een inspiratiebron voor nieuwe ideeën en een aanrader voor iedereen met weinig tijd die meer variatie in zijn of haar lessen wil aanbrengen.

Over de auteur van deze bespreking

Lonneke Boels (e-mailadres: boer_boels@planet.nl) is negen jaar in het bedrijfsleven werkzaam geweest, heeft daarnaast een aantal malen lesgegeven (onder andere op een mts en een pabo) en is op dit moment in opleiding voor een eerstegraads lesbevoegdheid.

WISKUNDE IN VAZEN

Randomized response

[Rob Bosch]

Een van de moeilijkheden bij enquêtes is dat men vaak geen eerlijk of in het geheel geen antwoord krijgt op gevoelige vragen. De mededeling dat de enquête anoniem is, zal door de deelnemer die geen zicht heeft op de wijze waarop de gegevens worden verwerkt niet altijd worden vertrouwd. Om op gevoelige vragen een eerlijk antwoord te krijgen hebben sociaalwetenschappers de methode van de zogenoemde *randomized response* bedacht. In zijn oorspronkelijke vorm[1] behelst deze methode het volgende.

Stel men wil antwoord op de gevoelige vraag: 'Bezit u een vuurwapen?'
De respondent trekt alvorens de vraag te beantwoorden een balletje uit een vaas met witte en zwarte balletjes. Als de deelnemer een witte bal trekt, antwoordt hij naar waarheid; als hij een zwarte bal trekt, geeft hij een onwaar antwoord.
De enquêteur, die uiteraard niet weet welke kleur bal de respondent getrokken heeft, kan zo uit het gegeven antwoord *niet* afleiden of de persoon al dan niet een vuurwapen bezit. Hij kent echter wel de samenstelling van de vaas en kan op basis daarvan een schatting maken van het percentage wapenbezitters.
Als namelijk de fractie van vuurwapenbezitters gelijk is aan f en de kans op een witte bal gelijk is aan p, dan is de kans dat een willekeurige respondent met 'ja' antwoordt, gelijk aan

$$P(ja) = f \cdot p + (1-f) \cdot (1-p)$$

Het aantal ja's in een groep van n personen is dan een stochast J die binomiaal verdeeld is met parameters n en $\theta = f \cdot p + (1-f) \cdot (1-p)$
Het gemiddeld aantal ja's in de steekproef, $\hat{\theta} = \frac{J}{n}$, is een zuivere schatter voor θ.
Uit deze schatter kunnen we de volgende zuivere schatter voor de fractie f van vuurwapenbezitters afleiden:

$$\hat{f} = \frac{\frac{J}{n} + p - 1}{2p - 1}$$

Als in een steekproef van 100 personen 65 personen 'ja' antwoorden terwijl de vaas zo is samengesteld dat $p = \frac{1}{3}$, dan vinden we voor f de schatting

$$\frac{\frac{65}{100} + \frac{1}{3} - 1}{-\frac{1}{3}} = 0{,}05.$$

We schatten het percentage vuurwapenbezitters in dit geval dus op 5%. Ondanks het feit dat we van individuele personen niet kunnen nagaan of ze een vuurwapen bezitten, vinden we toch een schatting van het percentage vuurwapenbezitters. De hiervoor gebruikte schatter is ook nog zuiver, d.w.z. gemiddeld geeft de schatter het juiste percentage.

Hoe betrouwbaar is onze schatting? Met andere woorden, hoe groot is de kans dat we redelijk in de buurt van het juiste percentage zitten? Om dat na te gaan kijken we naar de variantie van de schatter $\hat{f}$.

$$Var(\hat{f}) = Var\left(\frac{\frac{J}{n} + p - 1}{2p - 1}\right)$$

In ons voorbeeld is $n = 100$ en $p = \frac{1}{3}$.
Voor de variantie vinden we in dit geval

$$Var(\hat{f}) = Var\left(\frac{\frac{J}{100} - \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}\right) = Var(2 - \frac{3J}{100}) = \frac{9}{10000}\, Var(J)$$

De stochast J heeft een binomiale verdeling met de bekende variantie $Var(J) = n\theta(1-\theta)$
De kans geeft $p = \frac{1}{3}$ geeft $\theta = \frac{1}{3}f + \frac{2}{3}(1-f) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}f$.
De variantie van J is dus $Var(J) = 100(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}f)(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}f)$.
Voor de variantie van $\hat{f}$ vinden we

$$Var(\hat{f}) = \frac{9}{100}(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}f)(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}f)$$

Het uitwerken van de haakjes geeft

$$Var(\hat{f}) = \frac{2 + f - f^2}{100}$$

Dit kunnen we ook schrijven als

$$Var(\hat{f}) = \frac{f(1-f)}{100} + \frac{2}{100}$$

De eerste term in deze uitdrukking is de variantie van een steekproef zonder randomized response. De

randomized response methode geeft dus een extra variantie van 0,02.
De lezer kan eenvoudig nagaan dat de variantie van de schatter $\hat{f}$ bij de randomized response methode gelijk is aan

$$Var(\hat{f}) = \frac{f(1-f)}{n} + \frac{p(1-p)}{n(2p-1)^2} \qquad (*)$$

waarbij de tweede term weer de extra variantie van de randomized response is.
In ons voorbeeld is de variantie van de schatter dus minimaal 0,02. De standaardafwijking is dus minstens gelijk aan $0{,}1\sqrt{2} \approx 0{,}14$. Onze schatting van 5% voor het aantal vuurwapenbezitters kent dus een marge van zo'n 14%. Deze grote marge maakt de schatting hier geheel onbruikbaar.

De extra variantieterm in (*) is groot als p ongeveer gelijk is aan 0,5.
Voor $p = 0$ of $p = 1$ is de extra variantie gelijk aan 0, maar dan zijn we uiteraard terug bij een gewone steekproef. De kans p moet voldoende ver van 0 of 1 liggen om de respondenten te kunnen overtuigen dat het niet mogelijk is met een redelijke mate van zekerheid te raden of zij naar waarheid hebben geantwoord. Maar de grote marges maken in dit geval de schatting buitengewoon onbetrouwbaar.

Zoals we boven hebben gezien, is de oorspronkelijke vorm van randomized response niet goed bruikbaar. Men kan de procedure enigszins verbeteren door na het trekken van een zwarte bal een neutrale vraag te laten beantwoorden, zoals bijvoorbeeld 'Eindigt uw pincode op een 5?' De lezer kan op een zelfde wijze als boven nagaan welke consequenties dit heeft voor de betrouwbaarheid van de schatter.

Literatuur

[1] S.L. Warner: Randomized response, Journal of the American Statistical Association, 60(309), pp.63-69 (1965).

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is na zijn doctoraal wiskunde 13 jaar werkzaam geweest als wiskundeleraar in het middelbaar onderwijs. Sinds 1987 is hij als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Zijn belangstelling gaat o.a. uit naar de sociale keuzetheorie, op welk gebied hij aan de Katholieke Universiteit Brabant onderzoek verricht.

Correcties Euclides 78-5 [Redactie]

Door een technische onvolkomenheid zijn enkele correcties in de drukproeven van het februarinummer van Euclides (78-5) helaas niet verwerkt. Daardoor bevatte het groene overzicht op *pp. 218/219 in het artikel van Edu Wijdeveld* enkele vraagtekens op de plaats waar pijltjes hadden moeten staan. Voor de duidelijkheid volgt hier het gecorrigeerde overzicht in zijn geheel. Enkele andere correcties vindt u op *www.nvvw.nl/euclides785.html*

1958
Invoering nieuw leerplan vhmo gymnasium en hbs (met o.m. analytische meetkunde en beginselen infinitesimaalrekening; vooralsnog geen statistiek)

1959
Congres Royaumont ('A bas Euclide')

1961
Instelling CMLW
Activiteiten ten aanzien van:

I *vwo/havo/mavo*

vanaf 1963
Heroriënteringscursussen 1e-graads leraren vhmo (Kweekschool; HBO): verzamelingenleer, logica, groepentheorie, lineaire algebra en meetkunde, enz.
vanaf 1964
Rapport aan de staatssecretaris inzake een in te richten permanent Studiecentrum
vanaf 1965/1966
Schoolexperimenten Algebra en Analyse, Meetkunde met Vectoren (bovenbouw), Algebra en Meetkunde (onderbouw)
1966
Verzoek van de minister tot opstellen concept-leerplannen t.b.v. gehele Mammoetwet (brugklas, mavo, havo en vwo)
vanaf 1966
Heroriënteringscursussen leraren mavo/lbo
1967
Interimrapport annex discussienota's met leerplanvoorstellen → Voorstel 'Leerplan wiskunde Rijksscholen' (ingevoerd per 1-8-'68)
vanaf 1968
Toelichtingsnota's CMLW t.b.v. brugklas, mavo/havo/vwo. Invoering nieuwe methodes 'buiten controle' van de CMLW (bijv. Moderne wiskunde; Van A tot Z)
vanaf 1968
Meer methodisch/didactisch-gerichte heroriënteringscursussen 1e-graads leraren; idem: 3e-graads leraren via zgn. 'Centrale Commissie Begeleiding Mavo Wiskunde' (CCBMW)
1968
Rapport over wenselijkheid/mogelijkheid van invoering Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek, resp. Computer(wis)kunde in mavo/havo/vwo, gevolgd
vanaf 1969/1970
door schoolexperimenten

II *hoger beroepsonderwijs*

1969
Instelling subcommissie Wiskunde in Hoger Beroeps Onderwijs (WIHBO), met subcommissies voor o.a. hto, heao, enz.

III *basisonderwijs/PA*

1967
Rapport werkgroep Basisonderwijs → CMLW → minister 1968
'10-jarenplan' BO/PA (open, democratische, integrale leerplanontwikkeling); installatie regionale werkgroepen PA (leraren wiskunde en pedagogiek)
1969
Eerste PA-conferentie inzake vernieuwingsmogelijkheden BO; Project 'Wiskobas'
1970
'Wiskobasta'? → moties CMLW → audiëntie staatssecretaris Grosheide →
1971
Instelling IOWO

Op p. 223 moeten links bovenaan ?-I en ?-II gewijzigd worden in β-I en β-II.

't DENKEN BEVORDEREN

Veertig jaar onderwijs-verandering?

Dutch New Math na 1968

[Anne van Streun]

Mammoetwet en New Math hand in hand

Op 14 februari 1963 neemt het parlement de Wet op het voortgezet onderwijs aan (in het spraakgebruik de mammoetwet genoemd), en vanaf 1968 gaat het nieuwe schoolsysteem met de schooltypen mavo-havo-vwo van start. (Zoals wel vaker in de geschiedenis krijgt het lager beroepsonderwijs in deze onderwijshervorming weinig aandacht.) Al in 1964 beginnen acht scholen met een experimentele havo, in latere jaren gevolgd door onderwijsexperimenten in vwo en mavo. De landelijke pedagogische centra krijgen een belangrijke taak bij het uitwerken van de algemene doelstellingen, waarbij werk wordt gemaakt van het introduceren van werkvormen zoals groepswerk, die het actief leren kunnen bevorderen. Het *centrale onderwijsbeleid*, de oppervlakte van de onderwijsoceaan, wil veranderingen in het schoolsysteem en een vernieuwing van het onderwijs in de klas.
Parallel aan deze ontwikkeling plant zich overal in de westerse wereld de Spoetnikschok voort, die wetenschappers de kans geeft om de leerplannen voor de exacte vakken drastisch te vernieuwen. 'A bas Euclide!' is het credo van de Europese conferentie van Royaumont (1959). Vervang het onderwijs in al die verouderde technische vaardigheden door onderwijs in de eenvoudige basisstructuren van de wiskunde, *Weten waarom*. Het wiskundeonderwijs wordt een soort moedertaalonderwijs, voor iedereen te volgen. Bij de installatie van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (19 juli 1961) merkt staatssecretaris Stubenrouch van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen op dat de wiskunde een toepassingsgebied vormt in veel bedrijven en dat ook buiten het onderwijs een grote vraag naar competente wiskundigen is ontstaan. De commissie moet gaan onderzoeken welke delen van de moderne wiskunde in het vhmo moeten worden ingevoerd om de kloof tussen de wetenschap en de schoolwiskunde te verkleinen (zie verder Wim Groen in 'Honderd jaar wiskundeonderwijs'; [4]).

Een jonge wiskundeleraar

De jaren 1964-1970 zijn voor een jonge wiskundeleraar boeiende tijden. Mijn eigen school experimenteert met het nieuwe schooltype havo en het CPS schoolt ons bij in nieuwe werkvormen, zoals groepswerk. In sommige jaren zijn al mijn klassen in groepjes zelfstandig aan het werk en spreken ze per groepje het huiswerk af. De datum van het proefwerk ligt vast en op grote flappen wordt de voortgang van de groepjes onderling vergeleken. Ook voor mij is dat zelfstandig groepswerk wel handig, omdat ik als schooldecaan intussen in andere klassen mijn folders en mededelingen over de beroepsoriëntatie kan slijten. Hoogtepunten zijn de massale nascholingsbijeenkomsten waarin per keer honderden wiskundeleraren op gewone werkdagen door wiskundigen worden bijgeschoold in moderne wiskunde, zoals lineaire algebra, verzamelingenleer, kansrekening en statistiek. De relatie met het zich ontwikkelende nieuwe leerplan is ver te zoeken, maar leuk was het wel.

New Math

Een vergaande uitwerking van moderne wiskunde op schoolniveau is in 1968 te vinden bij onze zuiderburen. De Belgische wiskundige en senator Papy organiseert wiskundecursussen voor leraren en wekt bijvoorbeeld bij Piet Vredenduin enthousiasme voor de nieuwe onderwerpen. Samen met zijn vrouw Frédérique (lerares aan een normaalschool) ontwerpt Papy een full-colour (!) serie schoolboeken voor het voortgezet onderwijs[8], geheel in overeenstemming met de aanbevelingen van toonaangevende Europese conferenties. De figuren 1, 2 en 3 uit deel 1, bestemd voor 12- en 13-jarigen, laten zien dat de leer van de verzamelingen, relaties en vectoren uitloopt op de algebra van groepen. Op basis van die wiskunde wordt in het volgende deel de transformatiemeetkunde met vectoren opgebouwd, waarin de klassieke meetkunde-

stellingen terloops als toepassingen van algemene stellingen in een vectorruimte tevoorschijn komen. Papy zegt het zo: ‘De slappe aftreksels van de *Elementen van Euclides* worden eindelijk vervangen door transformatiemeetkunde.’
Ook in het basisonderwijs wordt wereldwijd de verzamelingenleer geïntroduceerd met het optellen van kardinaalgetallen van verzamelingen en het leren rekenen met het tweetallig stelsel en andere talstelsels.

Het nieuwe leerplan en de uitwerking
Niet zonder enige discussie kwamen inderhaast de nieuwe leerplannen, voorgesteld door de CMLW, tot stand. Zoals Hans Freudenthal later zou schrijven: ‘We werden als leerplanontwikkelaars gewoon overvallen door de stormachtige ontwikkeling in het voortgezet onderwijs in de jaren 60-70.’ In een brief van 23 augustus 1961 aan de CMLW[9], waarvan hij lid is, schrijft hij nog: ‘Ik acht het van weinig belang of de leerling verzamelingtheoretische en logische symbolen of vectoren en lineaire afbeeldingen op school leert kennen, indien hiermee op dezelfde wijze wordt omgesprongen als met de letters van de algebra. Zulk een verrijking van de stof zou waardeloos en zelfs een nog grotere belasting zijn.’ De vastgestelde leerplannen van 1968 zijn internationaal gezien weinig revolutionair en leggen vooral de nadruk op het gebruik van de taal en symbolen waarvan Freudenthal de waarde betwijfelde. De leerplannen zijn heel summier beschreven, zodat de toelichtingen geschreven door Piet Vredenduin van beslissende invloed blijken te zijn op de inhoud van de nieuwe schoolboeken en de examens. En Piet Vredenduin hechtte wèl sterk aan de logische taal en symbolen van de verzamelingen en de relaties, en fungeerde tientallen jaren als expert voor de examens (zie zijn eigen verhaal in het boek ‘Ik was wiskundeleraar’ van Fred Goffree; [3]).

Discussie over het leerplan
Vanaf het begin heeft het nieuwe leerplan ter discussie gestaan. Grote aantallen wiskundeleraren, mogelijkerwijs zelfs ruim 2500, sturen adhesiebetuigingen naar wiskundeleraar Dick van den Haak te Oegstgeest, initiatiefnemer van de Back-to-Basics actie WISKOBAH (zie [5], p. 259). Het bestuur van de NVvW en de CMLW zien hierin kennelijk geen aanleiding om het nieuwe leerplan alsnog bij te stellen. *Geen onrust veroorzaken* was het dringend advies van het ministerie van OC&W aan de CMLW, aldus Freudenthal veel later. De wiskundige N.G. de Bruijn (TU Eindhoven) beklaagt zich in Euclides (1968-43) over het ontbreken van toepasbare wiskunde in het nieuwe leerplan. Freudenthal, nu voorzitter van de CMLW, acht in zijn reactie de tijd nog niet rijp voor toegepaste wiskunde. Achter de schermen fulmineert hij tegen de overmaat aan symbolen in de nieuwe schoolboeken en tegen de invloed van Piet Vredenduin. Zijn vrees dat door de invoering van onbegrepen formalismen het wiskundeonderwijs erop achteruit zal gaan, blijkt terecht.

In de achtereenvolgende drukken van de schoolboeken voor havo-vwo wordt de formele benadering in de onderbouwboeken steeds meer teruggedrongen, omdat er in de eindexamens havo-vwo weinig gebruik van wordt gemaakt. Daarentegen moeten de mavo-leerlingen op hun eindexamen tot aan de invoering van de basisvorming nog heel veel decodeerwerk verrichten om de opgaven te begrijpen. De invloed van Vredenduin, adviseur van de opstellers van die examens, is nog tientallen jaren merkbaar (zie de voorbeelden van notaties uit de mavo-examens in figuur 4).

Beperking van de vrijheid van de leraar
Met de mammoetwet kreeg ook het centrale beleid veel meer invloed op de dagelijkse gang van zaken in de scholen. Een stroom van algemene maatregelen van bestuur met voorschriften over toelating, lessentabellen, aantal lessen per week, vakanties, splitsen en samenvoegen van groepen enzovoort, enzovoort werd voortaan vanuit Den Haag geregeld. Niet alleen het bijzonder onderwijs protesteerde vergeefs, maar bijvoorbeeld ook de ulo-organisaties die gewend waren aan een grote mate van vrijheid. Daarmee annex protesteerden groepen leraren tegen de dirigistische tendensen in de wet- en regelgeving. Ik citeer uit het Antimammoetrapport[7]:
‘Leraar noch leerling hebben ook maar iets in te brengen, zij hebben uitsluitend uit te voeren en domweg te doen wat elders door een hogere, niet zelden aan de directe schoolsituatie vreemde, macht bepaald wordt.’
‘Binnen het mammoetpatroon moet de leerstof per vak strak geprogrammeerd worden. Het zit er dus dik in dat de lessen zullen verstarren en verarmen. Dit onderwijs heeft geen behoefte meer aan specifieke persoonlijkheden onder de leraren.’
‘De tegenstanders van de monsterscholen worden zoet gehouden met het idee van de “units”, verschillende afzonderlijke eenheden waarin deze mammoetinrichtingen zullen worden onderverdeeld. Een vage belofte zonder werkelijke inhoud, want die units zullen toch noodzakelijkerwijs in de pas moet lopen van het geheel.’

Wat heeft het centrale beleid opgeleverd?
De nieuwe onderwijsstructuur leidt (onbedoeld) tot een veel grotere toestroom naar het hoger onderwijs. Met name het toen nog beperkte hoger beroepsonderwijs kon de toestroom lang niet aan. De externe democratisering is sterk gestimuleerd door het doorstromen van leerlingen naar een hoger schooltype, bijvoorbeeld van mavo-4 naar havo-4. Het vak wiskunde moet voor veel bredere groepen leerlingen worden onderwezen dan was voorzien. De leerplannen voor het mavo maar ook bijvoorbeeld voor het vak wiskunde I op het vwo (toelatingseis tot veel gammastudies) zijn daar niet op geschreven.
De trend naar steeds gedetailleerdere voorschriften heeft zich in 1968 ingezet en is tientallen jaren alleen maar versterkt. Dat heeft de professionele vrijheid van

de leraren en de scholen steeds verder beperkt, tot en met de PTA's in onze tijd. Pas sinds kort begint het inzicht te dagen dat een dergelijke voorschriftencultuur antiproductief werkt en spreekt het ministerie over 'Ruimte' en 'Vrijheid' voor de scholen en de leraren.

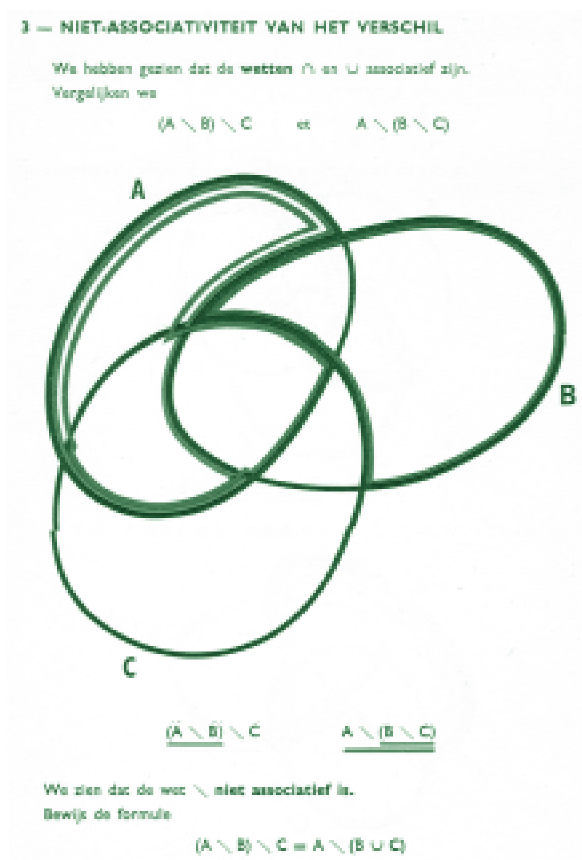
Hoe pakten de leerplannen uit?

De wiskundeprogramma's opgesteld door de CMLW zijn heel gematigd, zeker als je ze vergelijkt met die van landen als België, Duitsland en Frankrijk. De uitwerking is in mijn ogen bepaald door een tweetal factoren. Aan de ene kant is de inhoud van de schoolboeken in hoge mate de formalistische kant opgestuurd door de toelichtingen op de examenprogramma's van Vredenduin. Ook toen al werden programma's door een enkeling doorgedrukt zonder voldoende tegenwicht van de leraren en de vakvereniging. Aan de andere kant is de keuze van Wolters-Noordhoff voor het bewerken van een nogal formele wiskundemethode uit Schotland ('Modern Mathematics for Schools', Blacky & Chambers) tot 'Moderne wiskunde' bepalend geweest. Hoewel het verschijnen van die boeken soms bijna een jaar achterliep op de eerste lichtingen van de mammoetwet, was er toch nog geen alternatief. Een keuze van Wolters-Noordhoff of een andere grote uitgever voor bijvoorbeeld School Mathematics Project, de marktleider in Engeland met veel meer toegepaste wiskunde, had de inhoud van de schoolboeken de eerste decennia na 1968 een geheel andere kleur gegeven. Met Van Hiele en Freudenthal ben ik het eens dat de uitwerking van de nieuwe leerplannen van 1968 in veel opzichten een achteruitgang betekende voor de ontwikkeling naar betekenisvol wiskundeonderwijs. Nieuwe leerplannen veroorzaken niet alleen op korte termijn een dip in de kwaliteit van het wiskundeonderwijs, maar blijken ook op langere termijn slecht uit te kunnen pakken.

Wat gebeurde er met de lespraktijk?

Wat is er terechtgekomen van de onderwijsvernieuwing in de klas? Bijvoorbeeld van het groepswerk en andere nieuwe werkvormen? In de evaluatie van de Wet Voortgezet Onderwijs merkt de commissie vwo-havo-mavo in haar eindverslag *De mammoetexperimenten*[1], het volgende op:

FIGUUR 1 Niet-associativiteit van het verschil [8, p. 35]


3 — NIET-ASSOCIATIVITEIT VAN HET VERSCHIL

We hebben gezien dat de **wetten** ∩ en ∪ associatief zijn.
Vergelijken we

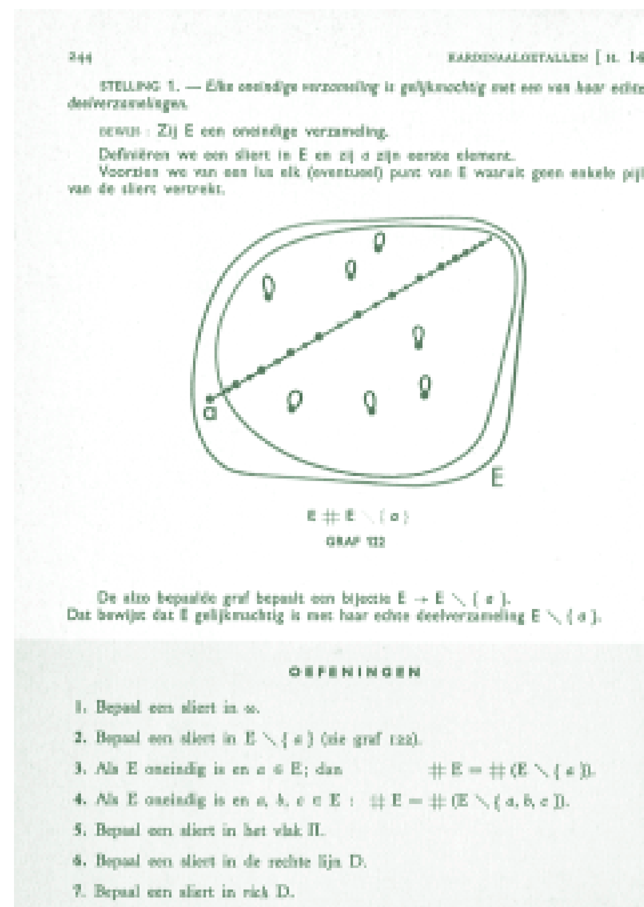
$(A \setminus B) \setminus C$ et $A \setminus (B \setminus C)$

$(A \setminus B) \setminus C$ $A \setminus (B \setminus C)$

We zien dat de wet $\setminus$ **niet associatief is.**
Bewijs de formule

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

FIGUUR 2 Gelijkmachtigheid [8, p. 244]


244 KARDINAALGETALLEN [H. 14

STELLING 1. — *Elke oneindige verzameling is gelijkmachtig met een van haar echte deelverzamelingen.*

BEWIJS : Zij E een oneindige verzameling.

Definiëren we een sliert in E en zij a zijn eerste element.
Voorzien we van een lus elk (eventueel) punt van E waaruit geen enkele pijl van de sliert vertrekt.

$E \# E \setminus \{a\}$

GRAF 122

De alzo bepaalde graf bepaalt een bijectie $E \to E \setminus \{a\}$.
Dat bewijst dat E gelijkmachtig is met haar echte deelverzameling $E \setminus \{a\}$.

OEFENINGEN

1. Bepaal een sliert in α.
2. Bepaal een sliert in $E \setminus \{a\}$ (zie graf 122).
3. Als E oneindig is en $a \in E$; dan $\# E = \# (E \setminus \{a\})$.
4. Als E oneindig is en $a, b, c \in E$: $\# E = \# (E \setminus \{a, b, c\})$.
5. Bepaal een sliert in het vlak Π.
6. Bepaal een sliert in de rechte lijn D.
7. Bepaal een sliert in rich D.

'Men vernieuwde het onderwijs niet fundamenteel en maakte weinig studie van de doelstellingen, leerstofinhouden, werkvormen en evaluatie.'
De commissie is van oordeel dat de overheid te weinig faciliteiten heeft geboden om de *leraren* voor te bereiden op de *nieuwe leerstof* en *nieuwe werkvormen*, zoals het zelfstandig door leerlingen laten bestuderen van onderwerpen, het zelfstandig laten uitwerken van individuele taken, het leiden van klasse- en groepsgesprekken en -discussie, het organiseren van groepswerk. En vijfentwintig jaar later concludeert de inspectie in haar evaluatie van de basisvorming[6] over die gewenste, activerende, werkvormen exact hetzelfde! Veranderingen in de lespraktijk blijken niet snel te worden gerealiseerd, ongeacht veranderingen in het schoolsysteem of de leerplannen.

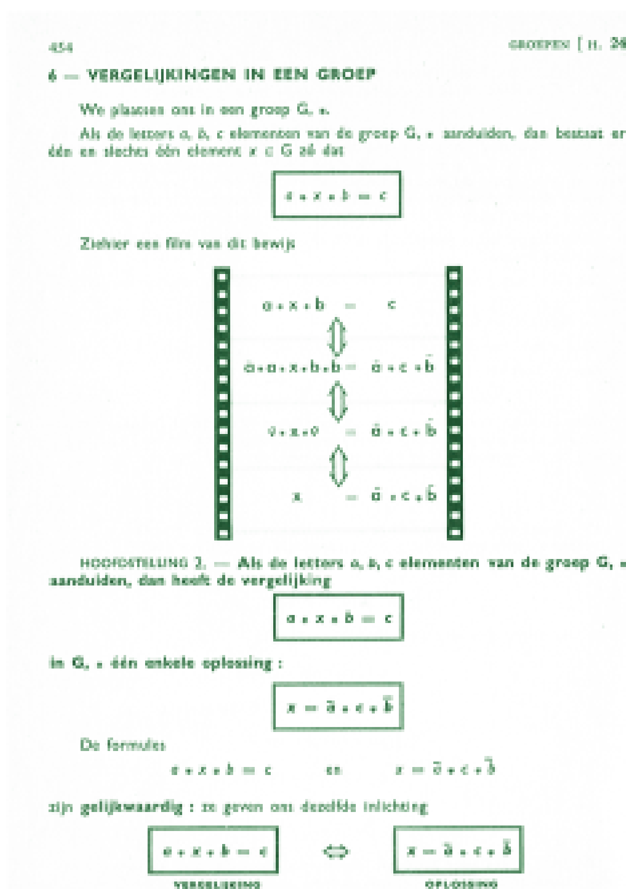
Bronnen en noten

[1] Commissie vwo-havo-mavo: De mammoetexperimenten, Staatsuitgeverij (1974).
[2] H. Freudenthal: Schrijf dat op Hans.
[3] F. Goffree: Ik was wiskundeleraar, SLO (1985).
[4] F. Goffree e.a.: Honderd jaar Wiskunde-onderwijs, NVvW (2000).
[5] F. Goffree: Leren van en leren met Joop van Dormolen (interview), Euclides 63-9, (juni-juli 1988).
[6] Inspectie van het onderwijs: Werk aan de basis, (1999).
[7] Kritiese leraren Nijmegen: Antimammoetrapport, SUN (1969).
[8] G. Papy, F. Papy: Moderne wiskunde 1, Didier (Brussel, 1968).
[9] Het eerste deel van deze brief is afgedrukt in Euclides 78-5, p. 222, figuur 2.

Over de auteur

Anne van Streun (e-mailadres: A.van.Streun@math.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskundedidacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.

FIGUUR 3 Groepentheorie [8, p. 454]



454 GROEPEN [H. 24

6 — VERGELIJKINGEN IN EEN GROEP

We plaatsen ons in een groep G, *.

Als de letters a, b, c elementen van de groep G, * aanduiden, dan bestaat er één en slechts één element $x \in G$ zó dat

$$a * x * b = c$$

Ziehier een film van dit bewijs

$$a * x * b = c$$
$$\Updownarrow$$
$$\bar{a} * a * x * b * \bar{b} = \bar{a} * c * \bar{b}$$
$$\Updownarrow$$
$$e * x * e = \bar{a} * c * \bar{b}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

HOOFDSTELLING 2. — **Als de letters a, b, c elementen van de groep G, * aanduiden, dan heeft de vergelijking**

$$a * x * b = c$$

in G, * één enkele oplossing :

$$x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

De formules

$$a * x * b = c \quad \text{en} \quad x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

zijn **gelijkwaardig** : ze geven ons dezelfde inlichting

$$\underset{\text{VERGELIJKING}}{\boxed{a * x * b = c}} \Leftrightarrow \underset{\text{OPLOSSING}}{\boxed{x = \bar{a} * c * \bar{b}}}$$

FIGUUR 4 Voorbeelden van notaties uit het mavo-examen 1974

1. De puntverzameling $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4 \ \wedge \ y = 2\}$
2. De oplossingsverzameling $\{x \mid \frac{1}{a}x + b = 0\}$
3. De oplossingsverzameling $\{x \in \mathbb{Z} \mid -x \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 \leq 0\}$

BASISBEROEPSGERICHTE LEERWEG: MAG HET ANDERS ZIJN?

Een pleidooi voor een eigen programma voor de zwakke leerling in de basisberoepsgerichte leerweg

[Wim Kuipers]

VAKANTIEBAANTJE

Adri heeft een vakantiebaantje.
Hij werkt 8 uur per dag.
Hij verdient € 50,75 per dag.
Hij hoopt in de vakantie € 1 015,- te kunnen verdienen.

2p O **1** Bereken hoeveel dagen hij moet werken om € 1 015,- te verdienen.
Schrijf de berekening op.

3p O **2** In een fabriek zet Adri houten stellingen in elkaar.
In 1 uur en 20 minuten bouwt hij een stelling op.
→ Laat door berekening zien dat hij 6 stellingen per dag opbouwt.
Schrijf de berekening op.

1p O **3** Adri bouwt in totaal 132 stellingen op.
→ Bereken hoeveel dagen dit werk duurt.
Schrijf de berekening op.

3p O **4** Heeft Adri in dit vakantiebaantje meer of minder dan € 1 015,- verdiend?
Laat zien hoe je aan je antwoord komt

FIGUUR 1 Opgave 1 uit het wiskunde-BB examen 2002

Haalbaarheid nu

Wat is het nut van de huidige wiskunde-invulling voor leerlingen uit de basisberoepsgerichte leerweg?
Velen zullen wellicht zeggen dat leerlingen deze wiskunde nodig hebben voor de doorstroming naar in de eerste plaats het mbo. Ook deze leerlingen hebben immers recht op een diploma of, als dat niet tot de mogelijkheden behoort, toch in elk geval op een certificaat. En uiteindelijk ligt er de verplichting om je te houden aan het examenprogramma zoals we het kennen uit het kerndeel. Als je echter aan docenten vraagt naar de haalbaarheid, dan zal een groot aantal zeggen dat het voor de zwakke leerling in de beroepsgerichte leerweg te veel gevraagd is. Met zwakke leerlingen denken we aan onze vroegere A-leerlingen. En dan gaat het vooral om de moeilijkheidsgraad. Moeilijk in de zin van: gebruik van de taal, wijze van vraagstelling, onbegrepen contexten e.d.

BB-examens 2003

Nu hebben we gezien dat het laatste BB-examen (zie figuur 1) al een stuk beter is gemaakt dan het pilot-examen uit 2001. En de verwachting is dat het examen voor 2003 perspectief voor de zwakke leerling zal bieden vanwege aanpassingen naar inhoud en lay-out. Voor het BB-examen kunnen de leerlingen namelijk de antwoorden op de vragen in hetzelfde boekje schrijven. Verder zullen de startvragen bij elke context niet al te moeilijk zijn. Het gaat dan meestal om eenvoudige berekeningen of afleesvragen.
We wachten af. Maar daarmee zijn we er niet.

Andere weg

De vraag blijft: waar dienen we de zwakke leerling het meest mee? Op een zodanige wijze dat deze leerling gemotiveerd blijft, het met plezier doet en ervaart dat wiskunde te maken heeft met iets uit de eigen wereld. Naar mijn mening kun je niet volhouden dat het volgen van de leerstof uit het boek daarvoor voldoende garantie biedt. De lesstof past vaak nergens bij, is vaak saai en te veel van hetzelfde. Het boek nodigt niet voldoende uit om activiteiten te ontwikkelen die passen bij de leerstijlen van deze leerlingen: het doen ervaren waar en wat wiskunde is. Ik wil niet zeggen dat we morgen de huidige boeken maar direct weg moeten doen, maar toch, misschien overmorgen wel. Ik bedoel dat we tussen nu en overmorgen ons moeten inspannen om voor deze leerlingen een andere weg te bewandelen, willen we het vak wiskunde een goede plek in hun leven geven. In elk geval moet ons doel zijn dat deze leerlingen op hun eigen niveau de gelegenheid krijgen, zich een wiskundige basis eigen te maken. Het gaat dan om een functionele gecijferdheid, een gevoel voor getallen. Als je aan de kassa staat, er benul van te hebben hoeveel je terugkrijgt of hoeveel je tekort komt, en wat je bij een bepaald bedrag te besteden hebt. En als je je kamer wilt inrichten en je beschikt over een bepaald budget, wat je dan wel of niet kunt doen bij IKEA.
Dit alles heeft niets te maken met een verlaging van niveau. Ook deze leerlingen moeten leren hoe ze een probleem oplossen en daarbij logisch redeneren.
Dan kun je natuurlijk kijken naar de overheid in de eerste plaats. Zeker ben ik van mening dat de overheid geld beschikbaar moet stellen om deskundigen de gelegenheid te geven materiaal te ontwikkelen waar we in het authentieke onderwijs mee uit de voeten kunnen. Authentiek onderwijs heeft o.a. als kenmerken dat er wordt uitgegaan van betekenisvolle leertaken, aansluiting bij de leefwereld van leerlingen, actieve deelname van leerlingen door zelf ervaren en ontdekken.

Schoolexamen

Ik zou overigens willen pleiten voor een geheel eigen programma voor deze leerlingen en een geheel eigen afsluiting. Voor mijn part geen centraal examen, maar een eigen schoolexamen. De inspectie kan worden belast met het toezicht op de deugdelijkheid van de opleiding. De eindtermen die aan zo'n opzet ten grond moeten liggen, zullen een sectoraal programma moeten opleveren, een schoolexamen dat per sector verschillend is. Je zou dan tevens kunnen denken aan samenwerking met het mbo en het bedrijfsleven. Een leerling sluit het laatste jaar af met een soort meesterwerkstuk en ontvangt een diploma.

Concreet

a. Leerjaar 1 en 2 zijn verder funderend voor rekenen en wiskunde. Je kunt dan je boek gebruiken en een selectie maken van de leerstof op grond van wat je, als Nederlander binnen de discipline van gecijferdheid, geacht mag worden te weten: hoe kan ik me redden in de maatschappij. Je zou eventueel kunnen denken aan het behandelen van modules, bijvoorbeeld verkeer, omgaan met geld, passen en meten, winkelen, lezen van recepten.
b. Leerjaar 3 en 4 zijn de examenjaren, de jaren waarin de leerling gericht binnen een leerweg de competenties opdoet die nodig zijn voor het goed functioneren in een praktijksituatie verbonden met een sector. Je neemt betekenisvolle situaties tot uitgangspunt.
Er zal binnen de school en de praktijkafdelingen en de avo-vakken overleg moeten zijn over de invulling. Met het mbo zal er overleg dienen te zijn over een goede aansluiting en het laten doorlopen van leerlijnen.
Wat ik bepleit is een *eigen programma* voor de zwakke leerling die een basisberoepsgericht programma moet volgen, afgesloten met een *schoolexamen*.

Ruimte en middelen

Ik denk dat de school ruimte heeft om er een goede invulling aan te kunnen geven. Ruimte voor het verwerven van kennis van rekenen en wiskunde gekoppeld aan praktijksituaties gerelateerd aan de opleidingen binnen het mbo. Wat zou het mooi zijn als het ministerie voor het ontwikkelen van materiaal op ruime schaal middelen beschikbaar stelt. Dit nog maar een keer gezegd, want de leerling is het waard.
De BB-leerling moet een betere kans geboden worden om wiskunde als zinvol te ervaren, daarom moet het programma een andere invulling en opzet krijgen.
Graag reactie!

Over de auteur

Wim Kuipers (e-mailadres: wkuipers@worldonline.nl) is docent vmbo aan het Greijdanuscollege te Zwolle.

WISFAQ: DIGITALE VRAAGBAAK VOOR WISKUNDE

'Heel erg bedankt voor het antwoord, we waren al bijna hopeloos geworden maar hebben nu weer hoop want we snappen het weer!!'

[Willem van Ravenstein]

Wat is WisFaq?

WisFaq is een (digitale) vraagbaak voor het wiskundeonderwijs in Nederland. Vanuit het overleg van 'webmasters van wiskundesites' is het idee ontstaan om een website te maken waar (met name) leerlingen wiskundevragen kunnen stellen die door 'deskundigen' worden beantwoord. Met steun vanuit het WisKids Consortium zijn we in september 2001 gestart met de eerste pilot. Op dit moment (februari 2003) worden er gemiddeld 20 vragen per dag beantwoord en staan er in de database 4400 beantwoorde vragen.

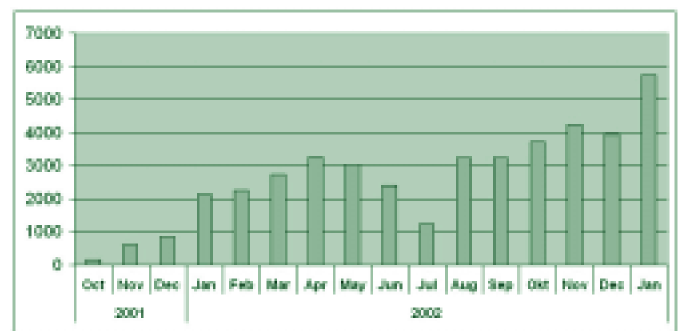
Hoe werkt het?

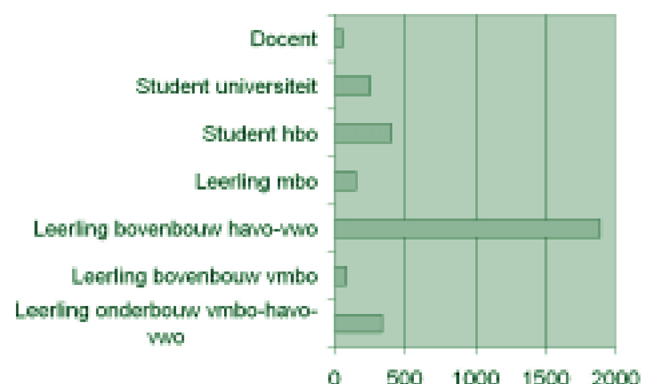
Op de website kunnen bezoekers vragen stellen, beantwoorders kunnen vragen beantwoorden en de moderator zorgt dat het allemaal werkt. De vragen en de antwoorden staan in een database, en allerlei administratie zoals e-mailtjes sturen wordt door de site geregeld.
Een vraag stellen kan door het invullen van een invulformulier. De vraag komt vervolgens in de database terecht. De beantwoorder kan, nadat hij/zij is ingelogd, zien welke vragen nog niet beantwoord zijn. Na beantwoording worden de vraag en het antwoord zichtbaar voor het publiek en de vragensteller krijgt een e-mailtje met de mededeling dat de vraag beantwoord is en op de site te bekijken is.
We proberen de vormgeving van de antwoorden zo helder mogelijk te houden, dus met mooie en duidelijke formules, grafieken, plaatjes en Cabri-constructies. Daarnaast kan een beantwoorder een vraag beantwoorden met een verwijzing naar één van veelgestelde vragen (FAQ's), een website, vragen om meer informatie, een vraag verwijderen en nog veel meer.

Vragenstellers

De vragenstellers geven bij de vraag aan, welk soort onderwijs ze volgen. Sinds kort zijn deze 'profielen' uitgebreid met een aantal profielen voor leerlingen uit België. De stand van zaken (voor wat betreft het aantal Nederlandse vragen) van februari 2003 staat in figuur 1.

FIGUUR 1





FIGUUR 2

Soorten vragen

De meeste vragen komen van leerlingen van de bovenbouw havo-vwo (zie figuur 2). Dit zien we uiteraard ook terug in de onderwerpen van de vragen: van tovervierkant tot het oplossen van een vierdegraads vergelijking, van rekenliniaal tot nummerbord, van groeimodel tot complexe getallen, van differentiaalvergelijking tot grafische rekenmachine.
Soms gaat het om acute, échte wiskundevragen zoals het ook in de klas gaat: een differentiatie, een vergelijking, een bewijs, enzovoorts, maar vaak zijn we bezig om praktische opdrachten te completeren, sites te zoeken of ideetjes voor werkstukken te geven.
Het zoeken naar de 'juiste' houding t.a.v. de manier waarop we vragen beantwoorden, blijft een punt van zorg. Net als in de les wil je natuurlijk leerlingen stimuleren tot zelf doen, uitproberen en nadenken. In WisFaq is dat niet anders... maar hoe doe je dat digitaal?

Beantwoorders

In de pilot zijn we begonnen met de groep webmasters van belangrijke (niet-commerciële) wiskundewebsites in Nederland. In principe kan 'iedereen' zich opgeven om mee te helpen via de website. Inmiddels worden de vragen beantwoord door een bonte verzameling van allerlei mensen met verschillende achtergronden en leeftijden.
Op dit moment bestaat de groep beantwoorders uit 42 personen, waaronder verschillende docenten voortgezet onderwijs, een natuurkundige, wiskundestudenten, een cryptograaf, leerlingen voortgezet onderwijs, wiskundigen, een econoom, ingenieurs, hogeschooldocenten, studenten lerarenopleiding, wiskundewebmasters, studenten van verschillende andere studierichtingen, enzovoorts... uit Nederland en België!

Opbrengsten

Zonder volledig te willen zijn, zou ik de vraag: 'Wat levert zo'n digitale vraagbaak nu op voor het wiskundeonderwijs?' als volgt beantwoorden.
- WisFaq is een plek waar alle leerlingen in het voortgezet onderwijs vragen kunnen stellen over wiskunde en (indien mogelijk) een 'deskundig' antwoord krijgen.
- Door de vele vragen en antwoorden ontstaat er een soort 'kennisbank' van voorbeelden, opgaven, oplossingen en verwijzingen naar andere bronnen. Veel vragenstellers haken aan op antwoorden uit de database en stellen vervolgvragen op eerder gegeven sites en suggesties.
- Veel websites voor wiskundeonderwijs verwijzen naar WisFaq. Daardoor komen 'wiskundevragen' niet meer bij de webmasters van die websites terecht, maar kunnen ze in WisFaq gesteld en beantwoord worden. Omdat veel vragen steeds weer terugkomen, hoeven deze vragen niet steeds opnieuw beantwoord te worden.
- Veel vragen gaan over praktische opdrachten. Je kunt je afvragen waarom dat zo is. Zijn die opdrachten misschien te vaag? Of te moeilijk? En over welke opdrachten blijven er maar vragen komen en hoe komt dat?
- Er is een groep leerlingen/studenten die als voorbereiding/toelating op een opleiding zelfstandig een hoeveelheid stof moeten doorwerken. Deze leerlingen/studenten vallen tussen wal en schip. Ze hebben geen docent en van de toekomstige opleiding zullen ze waarschijnlijk ook geen ondersteuning krijgen. In WisFaq kunnen ze wel terecht...
- WisFaq is voor iedereen toegankelijk. Het blijkt dat hier en daar ook mensen die niet studeren met wiskundige vragen zitten. Dat kan variëren van 'Hoe maak je een ovaal terras?' tot 'Wat is de kans op de jackpot?' We kwamen WisFaq al tegen bij een artikel over loterijen in de Consumentengids van januari 2003.
- Voor docenten kan WisFaq een goede plek zijn om te zien wat er zoal speelt in het wiskundeonderwijs en wat er zo op Internet te vinden is. Waar zijn leerlingen mee bezig? Wat zijn de moeilijke onderwerpen? Wat zijn nuttige zaken om eens een artikel over te schrijven of materiaal voor te maken? Kan ik hier, als docent, leuke ideeën opdoen voor een toets of een opdracht? Waar vind ik goede links over bepaalde onderwerpen?

Maar u kunt natuurlijk het beste zelf eens een keer rondkijken. Hieronder vindt u de relevante webadressen.

Links

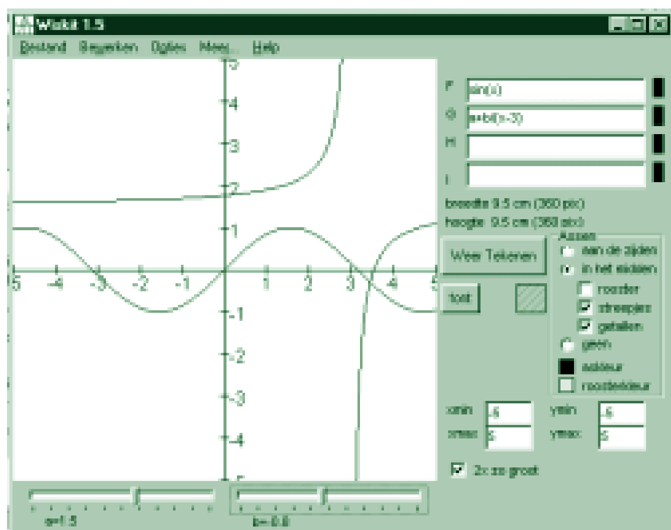
www.wisfaq.nl - digitale vraagbaak voor wiskunde
www.fi.uu.nl/wiskids/ - WisKids Consortium
www.kennisbanktechniek.nl – Axis
www.wiswijzer.nl – homepage van Willem van Ravenstein.

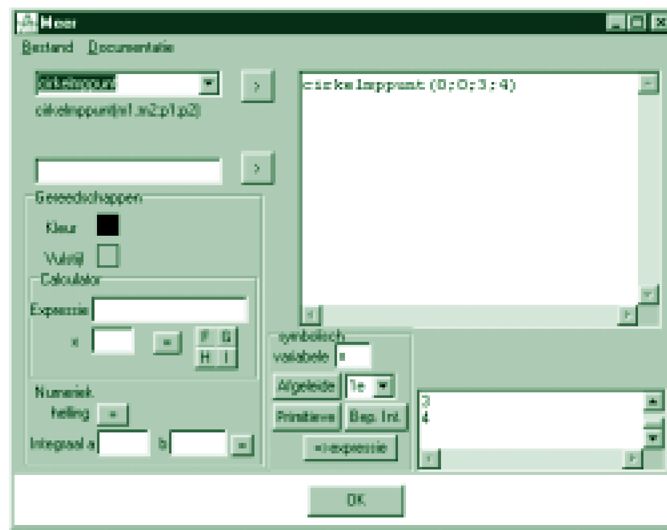
Over de auteur

Willem van Ravenstein (e-mailadres: wvr@wiswijzer.nl) is moderator van WisFaq en docent wiskunde, zowel aan de lerarenopleiding VO/BVE van de Hogeschool Rotterdam als aan het Haags Montessori Lyceum. Zijn homepage is www.wiswijzer.nl



Doelen van WisKids zijn: enthousiasme voor wiskunde bevorderen bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via wiskunde, en belangstelling bevorderen voor de exacte vakken.
WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO).
Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), Perspectief (STW/NWO en NVvW), Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade en het Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO.
Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door het Ministerie van OC&W, de Stichting Axis en de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalektro.
Het prijzengeld van de Wiskunde Scholen Prijs wordt mede gesponsord door NOCW en door de NVvW.
Meer informatie: *www.fi.uu.nl/wiskids* of per email: *wiskids@fi.uu.nl*





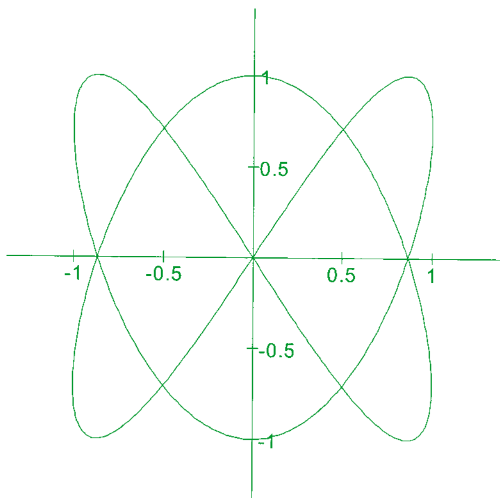
FIGUUR 1

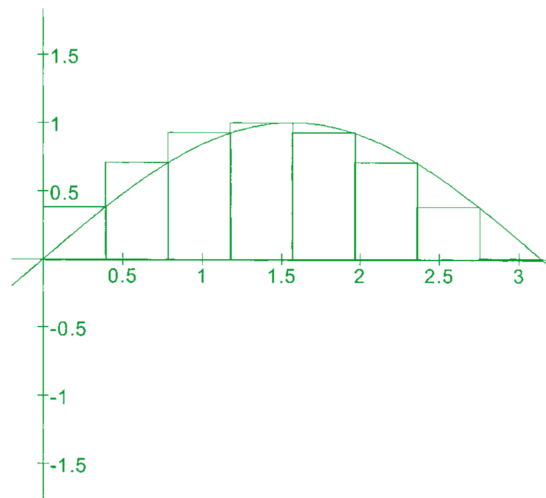
FIGUUR 2

WISKIT

Het tekenprogramma Wiskit is een gereedschapskist om allerlei illustraties van goede kwaliteit te maken die in lesmateriaal en toetsen voor het vak wiskunde kunnen worden opgenomen.

[Hans Klein]





FIGUUR 3

FIGUUR 4

Inleiding

Steeds meer worden illustraties bij toetsen en lesmateriaal gebruikt. Een tekening kan immers de opgave of tekst erg verhelderen.
Vaak is een veelheid aan programmatuur nodig om de gewenste tekeningen te maken: een grafiekentekenprogramma, een meetkundig tekenprogramma, een programma om webgrafieken te tekenen, etc.
Met Wiskit is het mogelijk veel van dit soort tekeningen met een en hetzelfde programma te maken; je kunt dan ook in een tekening verschillende soorten afbeeldingen combineren.
Omdat grafieken vaak als illustratie worden gegeven is het basisscherm van Wiskit het zogenaamde *grafiekenscherm* (zie figuur 1). Hiermee kunnen snel grafieken van functies worden gemaakt.
Vanuit dit venster kunnen gemaakte tekeningen in een aantal verschillende bestandsformaten worden opgeslagen. De volgende afbeeldingsformaten zijn mogelijk: de bitmapformaten GIF en JPG (voornamelijk geschikt voor internettoepassingen) en het vectorformaat WMF (Windows Metafile). Het WMF-formaat is bijzonder geschikt voor afbeeldingen die in Word- of Powerpoint-bestanden moeten worden opgenomen. De afdrukkwaliteit is beduidend beter dan die van bitmap-afbeeldingen, en afbeeldingen die in dit formaat zijn opgeslagen, kunnen met weinig tot geen verlies worden vergroot of verkleind. Het is zelfs mogelijk ze in Word achteraf nog te bewerken. Voor Latex-gebruikers is ook het eepic-formaat beschikbaar.

Het programmascherm

Via de menuoptie *Meer...* kun je naar het zogenaamde *programmascherm* (zie figuur 2). Hierin kunnen ook andere figuren op het grafiekenscherm worden getekend. Dat kan via een of meer korte opdrachten. Bijvoorbeeld: de opdracht *cirkelmppunt(0;0;3;4)* tekent de cirkel met middelpunt (0, 0) door het punt (3, 4).

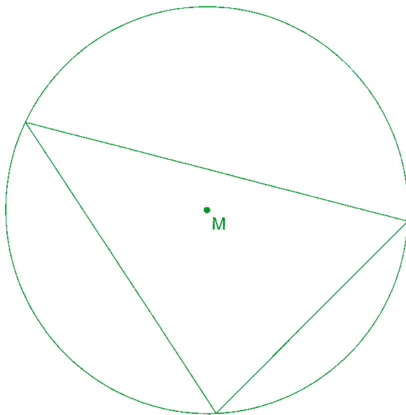
Zo kan met een aantal van dit soort opdrachten samen een figuur worden getekend. Een beginnende gebruiker kan zo vrij eenvoudig een redelijk ingewikkelde tekening maken.
Naast opdrachten om figuren te tekenen is het ook mogelijk om gebruik te maken van variabelen en van structuren als *herhaal...totdat*, *als...anders...eindal*s, enzovoort. Met andere woorden: Wiskit is programmeerbaar.
Al met al zijn ruim honderd opdrachten beschikbaar. Welke dat zijn is te zien in het uitrolvenster linksbovenaan het programmascherm. Als een van de opdrachten in dit venster wordt gekozen, verschijnt een korte herinnering onder dit uitrolvenster welke parameters de opdracht heeft. Dit is een handige steun om snel te weten te komen welke opdrachten er zijn en hoe die moeten worden gebruikt. Dit vergroot de gebruiksvriendelijkheid aanzienlijk. Meer informatie over elke opdracht is te vinden in het helpbestand. Bovendien kan bij de menu-optie *Documentatie* een bestand met voorbeeldprogramma's en een bestand met een inleiding in het programmeren met Wiskit worden opgeroepen.
Via de menuoptie *Bestand* kunnen programma's worden opgeslagen en teruggelezen.

Voorbeeld 1 - kromme tekenen

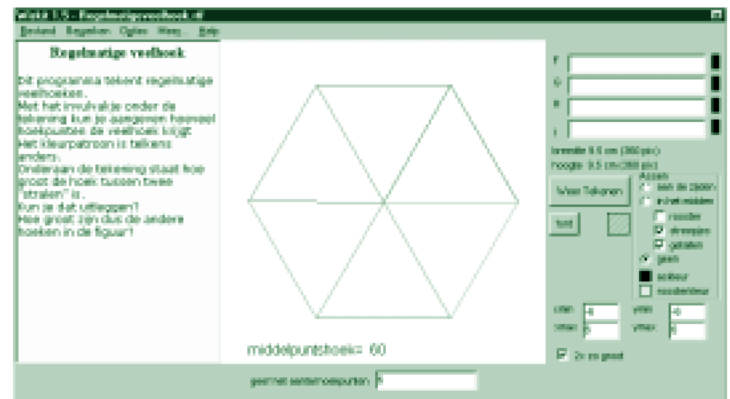
Een programmaregel die de kromme $(x,y) = (\sin(2t), \cos(3t))$ tekent ziet er als volgt uit:

```
kromme(sin(2*t);cos(3*t);0;2*pi;0.01)
```

Alle noodzakelijke gegevens staan achter de opdracht *kromme*: de x-functie, de y-functie, de kleinste waarde van t (n.l. 0) ,de grootste waarde van t (n.l. 2*pi) en de stapgrootte waarmee t verhoogd wordt (0,01).
Het resultaat staat in figuur 3.
Op soortgelijke manier zijn er tekenopdrachten voor cirkels, ellipsen, rechthoeken, veelhoeken, lijnen, grafieken, lijnelementenvelden, integraalkrommen, conflictlijnen, webgrafieken, etc. Ook ruimtelijke tekenopdrachten in zowel parallelprojectie als centrale



FIGUUR 5



FIGUUR 6

projectie zijn beschikbaar. Er zijn ook opdrachten om tekst in de tekening te plaatsen.

Voorbeeld 2 - figuren combineren

Het tweede voorbeeld laat zien hoe het tekenen van rechthoeken gecombineerd kan worden met de grafiek van een functie (zie figuur 4).

```
grafiek (sin(x))
a:=0
da:=pi/10
herhaal
rechthoek(a;0;a+da;sin(a+da))
a:=a+da
totdat(groter(a,pi-da))
```

Het programma toont ook het gebruik van de controlestructuur *herhaal...totdat*, samen met het gebruik van variabelen.
Andere controlestructuren zijn *for...next* en *voorelke*.

Voorbeeld 3 - omgeschreven cirkel

Het derde programma laat zien hoe de omgeschreven cirkel van een driehoek kan worden geconstrueerd (zie figuur 5).

```
maakpunt(a;-4;2)
maakpunt(b;4;0)
maakpunt(c;0;-4)
veelhoek(a1;a2;b1;b2;c1;c2)
snijpuntmll(a1;a2;b1;b2;c1;c2;s1;s2)
cirkelmppunt(s1;s2;a1;a2)
stip(s1;s2;2)
tekst(s1;s2;M)
```

Met de opdracht *maakpunt* worden de coördinaten van de drie hoekpunten vastgelegd.
Met de opdracht *veelhoek* wordt de driehoek getekend.
De opdracht *snijpuntmll* berekent het snijpunt van de drie middelloodlijnen van de zijden en plaatst de coördinaten van dit snijpunt in de variabelen *s*1 en *s*2.
Deze worden dan gebruikt om de cirkel en zijn middelpunt te tekenen.

Er zijn ook opdrachten om snijpunten van bissectrices, twee lijnen, twee cirkels of cirkel en lijn te berekenen.

Voor wie nog meer wil

Naast de al genoemde mogelijkheden zijn er nog de volgende: ruimtelijke tekeningen, strings en expressies, de mogelijkheid om invoervelden, schuifbalken en uitrolvensters op het grafiekenscherm te plaatsen die vanuit een programma kunnen worden gelezen, symbolische algebra (beperkt tot substitueren, differentiëren en primitiveren). Ook kunnen punten op de tekening worden geplaatst die met de muis kunnen worden verplaatst. Deze toevoegingen maken het mogelijk interactieve programma's te maken die dicht in de buurt komen van veel applets. Uiteindelijk kan zo'n interactief programma nog samen met een begeleidende tekst in een zogenaamde *presentatie* worden samengenomen (zie figuur 6).
In het distributiebestand van Wiskit zijn een aantal presentaties opgenomen die op zichzelf al de moeite waard kunnen zijn.

Informatie

Wiskit kan werken op een computer waarop Windows 95 of hoger is geïnstalleerd. Wiskit wordt door de auteur gratis ter beschikking gesteld. Opmerkingen van gebruikers zijn welkom en hebben in het verleden tot belangrijke verbeteringen bijgedragen.
Wiskit kan via internet worden opgehaald via het adres *http://home.wxs.nl/~hklein/wiskit.htm*

Over de auteur

Hans Klein (e-mailadres: hklein@wxs.nl) is docent wiskunde aan het Zernike College te Haren. Hij is tevens de maker van het in dit artikel beschreven programma Wiskit. Zijn speciale belangstelling gaat uit naar ICT-gebruik in de wiskunde.
Hij beheert ook een website speciaal gewijd aan wiskunde: http://home.wxs.nl/~hklein/math.htm

Aankondiging / Veelvlakkenprijsvraag [Chris Zaal]

In samenwerking met de stichting Ars & Mathesis organiseert het wiskundetijdschrift Pythagoras in het voorjaar van 2003 een grote *Veelvlakkenprijsvraag*, waarmee vele prijzen te winnen zijn, waaronder een hoofdprijs van 1000 euro.
Opdracht is het ontwerpen van een ruimtelijke figuur met een bijzondere en kunstzinnige symmetrie.
Deelname aan de prijsvraag staat open voor iedereen: jong en oud.
De inzendtermijn is van 15 april tot en met 15 juni 2003. De details van de prijsvraag staan op de website van Pythagoras:
www.science.uva.nl/misc/pythagoras

Deze prijsvraag is bedoeld voor iedereen: leerlingen, amateurs en professionele kunstenaars wordt gevraagd een model van een veelvlak te maken, waarin uitkomt
- hoe bijzonder dat veelvlak is;
- hoe verrassend het in elkaar zit;
- hoe het kan worden opgesplitst;
- welke prachtige symmetrie het heeft;
- hoe je een route over de ribben kunt maken;
- welke bijzondere kleuringen van de zijvlakken er mogelijk zijn;
- enzovoort, enzovoort.

Veelvlakken zijn ruimtelijke figuren die alleen platte zijvlakken hebben. Bekende voorbeelden zijn piramide, kubus en prisma. Drieduizend jaar wiskundig speurwerk hebben een eindeloze variatie opgeleverd van gulden ruitendertigvlak tot kleine sterdodecaëder, van voetbal tot grote romben-icosidodecaëder. Elk veelvlak laat iets zien van de samenhang en symmetrie die in de ruimte mogelijk zijn.

Het model mag van hout, papier, plastic, steen, kurk, ijzerdraad of gips zijn, of welk duurzaam materiaal dan ook. Het model mag beweegbaar zijn zodat het in verschillende standen nog meer zichtbaar maakt van het veelvlak. In plaats van één veelvlak mag je ook meerdere veelvlakken kiezen als onderwerp; in dat geval bestaat de inzending uit een serie modellen. Zelfs een virtueel model is toegestaan: een animatie van (het) veelvlak(ken) op de computer.

Er zijn vier wedstrijdcategorieën, en per categorie wordt een prijs van 500 euro uitgereikt. De allerbeste inzending wordt beloond met een extra prijs van nogmaals 500 euro. Daarnaast zijn er nog vele extra prijzen beschikbaar, waaronder een studentenversie van het wiskundeprogramma Mathematica, vier keer het programma Mathematical Explorer (Wolfram Research) en vier grafische rekenmachines TI-83 Plus Silver Edition, en één keer het programma Rhinoceros (een 3D-pakket ter waarde van 2300 euro).

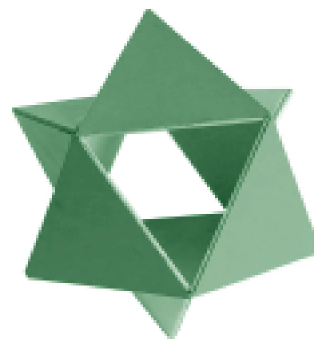
Hoe creatiever de inzending, hoe meer de jury dat zal waarderen. De jury bestaat uit Rijkje Dekker (UvA), Thijs Notenboom (HvU), Govert Schilling (wetenschapsjournalist) en Piet van Mook (beeldend kunstenaar) en staat onder leiding van prof. F. van der Blij (emeritus UU).
De winnaars worden bekend gemaakt in het eerste Pythagorasnummer van het seizoen 2003-2004.

Informatie over veelvlakken is uiteraard te vinden in Pythagoras en op de website
www.science.uva.nl/misc/pythagoras
Hier zijn ook het inzendadres en het benodigde wedstrijdformulier te vinden. Insturen kan alléén tussen 15 april en 15 juni 2003.

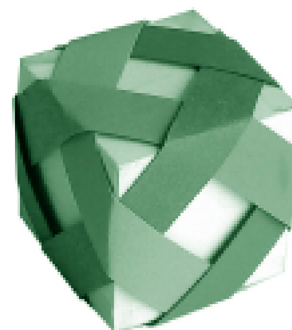
Nadere informatie

www.arsetmathesis.nl
www.science.uva.nl/misc/pythagoras
en voor de Veelvlakkenposter:
www.science.uva.nl/misc/pythagoras/poster

FIGUUR 1 Ringvormig 12-vlak ontdekt door Rinus Roelofs; houten model van Sander Neuteling (EFA)



FIGUUR 2 Een vouwmodel van een kubus



VLIEGENDE VEELVLAKKEN

[Chris Zaal]

De lucht in

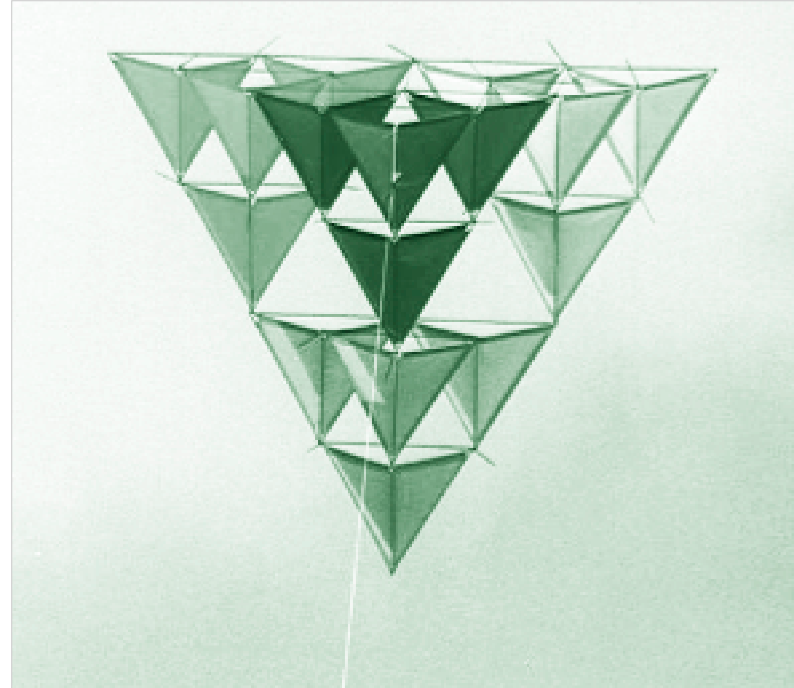
Aan het einde van de negentiende eeuw was er een wereldwijde competitie gaande. Doel was een vliegmachine te bouwen die de mens het luchtruim in kon brengen. De strijd werd beslist door de gebroeders Wright, die in 1903 als eersten een korte bemande glijvlucht maakten.

Twee jaar eerder, in zijn artikel '*Is the Air-ship Coming'* (Mclure's Magazine, september 1901), concludeert professor S. Newcomb nog dat 'de constructie van een vliegmachine die zelfs ook maar één man kan vervoeren onmogelijk is zonder de ontdekking van een nieuw metaal of een nieuwe kracht'. Hij baseert zich op de volgende redenering: 'Laat ons twee exact gelijke vliegmachines maken, de één precies twee keer zo groot als de andere, in alle richtingen. We weten dat de volumes, en dus de gewichten, zich verhouden als de derde macht van hun afmetingen. De derde macht van twee is acht: het grote vliegtuig zal dus acht keer zo zwaar zijn als het kleine vliegtuig. Maar de oppervlaktes verhouden zich als de kwadraten van de afmetingen. Het kwadraat van twee is vier. De zwaardere vliegmachine heeft een vier keer zo groot vleugeloppervlak om mee te vliegen als de kleinere machine, en is duidelijk in het nadeel voor wat betreft de verhouding van *efficiëntie : gewicht*.'

De vlieger van Bell

Alexander Graham Bell, tegenwoordig vooral bekend als de uitvinder van de telefoon, deed ook mee in de race om de bouw van de eerste vliegmachine. Hij hield zich vooral met vliegers bezig. Hij liep tegen bovenstaand probleem aan toen hij een Hargrave-doosvlieger (zie figuur 2) maakte op reuzenformaat, ter grootte van twee kleine huiskamers. Bell had gehoopt er een man mee te kunnen optillen, maar om deze reuzenvlieger zelfs ook maar te laten opstijgen bleek orkaankracht nodig.

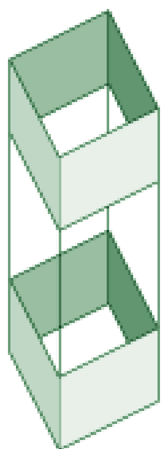
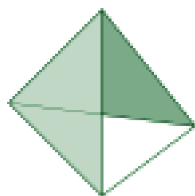
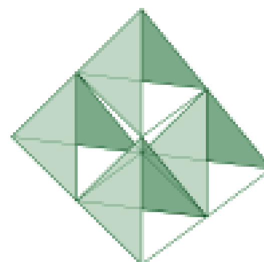
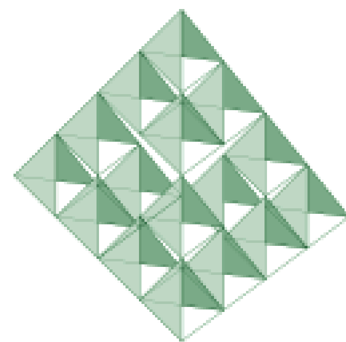
FIGUUR 1 Een 16-cel in de lucht (foto: Tony Broad)



Bell gaf niet op. Hij moest een constructie bedenken die vergroot kan worden zónder dat de verhouding *oppervlakte : gewicht* toeneemt. De vergroting kon er dus niet uit bestaan, het ontwerp simpelweg in alle richtingen te vergroten. In een ontwerp op basis van een regelmatig viervlak kwam hij tot een constructie van een vlieger waarvan de afmetingen willekeurig vergroot konden worden. In Bells vlieger blijft de verhouding *vleugeloppervlak : gewicht* constant, onafhankelijk van het aantal malen dat het ontwerp vergroot wordt.

Een fractale vlieger

De basis voor de vlieger van Bell is een regelmatig viervlak (tetraëder): een piramide met een driehoekig grondvlak. Het geraamte wordt gevormd door zes even

FIGUUR 2 De doosvlieger van Hargrave
FIGUUR 3 De basiscel voor de tetraëdervlieger van Bell
FIGUUR 4 De 4-cel
FIGUUR 5 De 16-cel

lange stokken (de ribben) van 50 centimeter, waarvan er steeds drie in de hoekpunten samenkomen. Twee van de vier zijvlakken worden bespannen met vliegerstof, de andere twee zijvlakken blijven open (zie figuur 3). Dit viervlak is de basiscel voor het vliegerontwerp. Voor constructietips zie de internetadressen aan het eind van dit artikel.
Vier van deze cellen kunnen worden samengevoegd tot een twee keer zo groot veelvlak (zie figuur 4). De vier tetraëders op de hoeken laten in het midden een gat in de vorm van een regelmatig achtvlak, een octaëder. Dit gat werkt gunstig op de vliegeigenschappen van de vlieger: het vergroot de stabiliteit. Deze 4-cel, met ribben van één meter, is al geschikt om mee te vliegeren.
Vier 4-cellen vormen samen een 16-cel (zie figuur 5 en figuur 1). Deze 16-cel is in alle richtingen vier zo groot als de basiscel. De oppervlakte is zestien keer zo groot, en het gewicht idem dito. De verhouding *oppervlakte : gewicht* is dus niet veranderd. Dat blijft zo als de vlieger verder vergroot wordt.
Als we deze constructie in gedachten doorzetten, krijgen we een fractal: een object dat zelfgelijkvormig is. De grote tetraëder is gelijkvormig met een van de vier kleinere viervlakken waaruit hij is samengesteld. Vergroten we zo'n kleinere tetraëder met factor 2, dan krijgen we het originele veelvlak terug. Per definitie heeft de (ideële) constructie van Bell de volgende fractale dimensie D:

$$D = \frac{\log a}{\log b} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

Hierin is
a = aantal gelijkvormige delen bij de gegeven vergrotingsfactor;
b = de vergrotingsfactor zelf.

De (ideële) vlieger van Bell is dus een driedimensionale fractal met $D = 2$.

Oude toepassingen...

In 1906 contrueerde Bell de *Cygnet*, een vlieger bestaande uit 3393 tetraëder-cellen met ribben van 25 centimeter. Met deze vlieger werd een passagier, luitenant Thomas E. Selfridge, tot een hoogte van 60 meter boven de baai van Baddeck opgetild.
Op de tetraëdervlieger van Bell zijn heel veel variaties mogelijk: de 10-cel, de 20-cel, de 7-cel, de 34-cel, enzovoort. De constructie van bijvoorbeeld een 100-cel is een fantastisch onderwerp voor een klassenwerkstuk (zie de website van Anthony Thyssen).

... en nieuwe, voor de prijsvraag?

Hoeveel veelkleurige fractals waaien er deze zomer aan de Hollandse stranden?
Nieuwe variaties op dit idee zijn van harte welkom als inzending op de Veelvlakkenprijsvraag van het tijdschrift Pythagoras (zie pagina 289 in dit nummer van Euclides).

Bron

Alexander Graham Bell (president van de National Geographic Society): Tetrahedral Principle in Kite Structure, National Geographic Magazine, Vol. XIV, No. 6 (June 1903).

Websites

- *http://home.snafu.de/thomiru/bell_eng.htm*
- *www.robsplace.f9.co.uk/kitestuff/bell.htm (met bouwaanwijzigingen)*
- *www.sct.gu.edu.au/~anthony/kites/tetra (veel variaties en een prachtig klassenproject)*

Over de auteur

Drs. C.G. Zaal (e-mailadres: chrisz@fi.uu.nl) is medewerker van het Freudenthal Instituut. Namens het Wiskundig Genootschap is hij uitgever van Pythagoras.

LEVE DE WISKUNDE! NIET ALLEEN VIA WEBSITES

[Dick Klingens]

April 2003: Math Awareness Month

Dat men zich niet alleen in Nederland zorgen maakt over de tanende belangstelling voor de wiskunde, moge blijken uit de al enkele jaren geleden in de VS in het leven geroepen Math Awareness Month (MAM).
De *American Mathematical Society*, de *Mathematical Association of America*, en de *Society for Industrial and Applied Mathematics* willen daarmee het belang van de wiskunde, ontwikkelingen in de wiskunde en toepassingen van wiskunde onderstrepen en tevens onder de aandacht brengen van een breed (niet alleen wiskundig geschoold) publiek.
Het MAM-thema voor april 2003 is Mathematics and Art.
In het begeleidend persbericht lezen we:
'The connection between mathematics and art goes back thousands of years. The ancient Greeks and Romans used mathematics in sculptures and to aesthetically design buildings. In the 15th century Leonardo da Vinci wrote: "Let no one read me who is not a mathematician." In the 16th century Dürer employed mathematics to introduce perspective in drawings. In the 18th and 19th centuries mathematics was extensively used in the design of Gothic cathedrals, Rose windows, mosaics and tilings. In the 20th century geometric forms were fundamental to the cubists and many abstract expressionists. In recent decades several award winning sculptors have used topology as the basis for their pieces. The close connection between mathematics and art is most readily seen in the works of the Dutch artist M. C. Escher. Among the mathematical ideas represented in his work are: infinity, Möbius bands, tessellations, deformations, reflections, Platonic solids, spirals, symmetry, and the hyperbolic plane.'

Het begon in de VS allemaal in 1986 (!). In dat jaar werd de eerste Math Awareness Week - toen nog een week - gehouden. Ja, zelfs aankondigd door de toenmalige president van de VS, Ronald Reagan, met onder meer de woorden:
'Despite the increasing importance of mathematics to the progress of our economy and society, enrollment in mathematics programs has been declining at all levels of the American educational system. Yet the application of mathematics is indispensable in such diverse fields as medicine, computer sciences, space exploration, the skilled trades, business, defense, and government. To help encourage the study and utilization of mathematics, it is appropriate that all Americans be reminded of the importance of this basic branch of science to our daily lives.'
(Hoort u mevrouw Van der Hoeven iets dergelijks zeggen?)

De activiteiten in de VS zijn velerlei, meestal georganiseerd door de wiskundefaculteiten van de verschillende universiteiten, maar ook door instellingen uit de publieke sector en studentenorganisaties: workshops, wiskundecompetities, tentoonstellingen, festivals, lezingen en symposia.
Op de MAM-website[1] vinden we (o.a.) enkele korte inleidende, leesbare, artikelen (essays). We noemen ze maar allemaal:
- Annalisa Crannell: Math and Baseball and Art
- Douglas Dunham: Hyperbolic Art and the Poster Pattern (zie figuur 1)
- Marc Frantz: Drawing with Awareness
- Nathaniel Friedman: Fractals Bounding Negative Space
- George Hart: Mathematical Awareness via Geometric Sculpture
- Doris Schattschneider: Mathematics and Art - So Many Connections
- Clifford Singer: The Conceptual Mechanics of Expression in Non-Euclidean Fields.

Ars et Mathesis

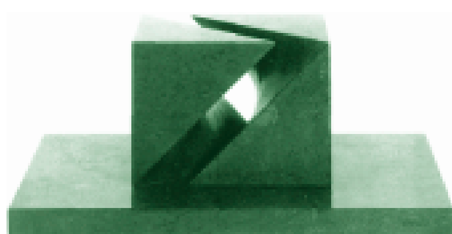
Het is natuurlijk toevallig dat ook dit jaar de Nederlandse stichting *Ars et Mathesis* (AetM) – waar kunst (ars) en wiskunde (mathesis) samenkomen, ontstaan boeiende resultaten – 20 jaar bestaat. AetM werd in 1983 opgericht door F. van der Blij en H. de Rijk (Bruno Ernst). Jaarlijks organiseert de stichting een 'art and math awareness day'; dit jaar is dat op zaterdag 22 november. Maar natuurlijk wordt er ook aandacht aan het vierde lustrum besteed.

Op de AetM-website[2] staat een overzicht van de activiteiten in dat kader (een en ander wel onder voorbehoud).

- Van 21 juni tot 27 juli 2003 - *Bomen van Pythagoras I, Geconstrueerde Groei*
In het Mondriaanhuis in Amersfoort: ‘Historisch’ werk van kunstenaars die onder invloed van Mondriaan en De Stijl werkten, maar die - in tegenstelling tot Mondriaan - zelf wel wiskunde toepasten; o.a. Marlow Moss, Joost Baljeu, Ad Dekkers, vroeg werk van Peter Struyken en Ewerdt Hilgerman.
- Van 31 mei tot 27 juli 2003 - In het Mondriaanhuis is bovendien werk te zien van de 80-jarige Alfons Kunen (zie figuur 2). Kunen werkt vanuit vastomlijnde wiskundige regels die soms zeer zichtbaar zijn, maar meestal een verborgen leidraad vormen. De laatste jaren maakt Kunen schilderijen die op fractale structuren steunen.
- Van 6 september tot 22 november 2003 - *Bomen van Pythagoras II, Geconstrueerde Groei*
Grote tentoonstelling in het Mondriaanhuis met ruim 35 kunstenaars uit diverse Europese landen die Concrete Kunst maken. Er is permanent een speciale Ars et Mathesis-zaal, waarin ook computeranimaties te zien zijn.
- Een speciaal zomernummer van Arthesis (het twee keer per jaar verschijnend periodiek van AetM), aansluitend bij de tentoonstelling.
- Een onderwijsproject gericht op basis- en voortgezet onderwijs, aansluitend bij de exposities.
- In oktober 2003 wordt er een *internationaal symposium* in het Mondriaanhuis gehouden over het thema *Concrete Kunst en Wiskunde*; kunstenaars en deskundigen uit verschillende disciplines leveren daaraan een bijdrage.

FIGUUR 1 De MAM-poster





FIGUUR 2 Alfons Kunen: Kubus-sculptuur

Ook doen?

Zou het niet mooi zijn als we iets als de Math Awareness Month hier in Nederland breed opzetten, eventueel in aansluiting op de activiteiten van AetM? Wie ‘we’ dan (zouden moeten/kunnen) zijn? NVvW, Wiskundig Genootschap, FI, KNAW, alle wiskundefaculteiten, ...
Misschien wel alle organisaties (en mensen) die zich de afgelopen maanden boos hebben gemaakt op mevrouw Van der Hoeven!
Welke organisatie neemt het initiatief?

Websites

[1] MAM: http://mathforum.org/mam/03/
[2] AetM: www.arsetmathesis.nl

Over de auteur

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.demon.nl) is als wiskundeleraar verbonden aan het Krimpenerwaard College en onder meer bestuurslid van de Stichting Ars et Mathesis.

Van de bestuurstafel

AAN DE MINISTER

Geachte mevrouw Van der Hoeven,

Hierbij geven we u graag onze reactie op de notitie ‘Ruimte laten en keuzes bieden in de tweede fase havo/vwo’.
- In onze reactie besteden we allereerst aandacht aan de algemene uitgangspunten van de notitie en van de tweede fase. We tonen aan dat de voorgestelde plannen enerzijds soms in strijd zijn met die uitgangspunten en anderzijds de gesignaleerde problemen niet alleen niet oplossen, maar zelfs nog meer problemen oproepen.
- Dat mondt uit in ons advies om de gemaakte keuzes in het licht van de huidige realiteit te heroverwegen en niet meer overhoop te halen dan strikt noodzakelijk is. Handhaaf de profielen op de huidige omvang. Het onderwijs is gebaat bij rust; geef ons de tijd om het onderwijs in de tweede fase verder vorm te geven zonder voortdurend met nieuwe regels te worden geconfronteerd.
- Vervolgens presenteren we een alternatief, waarbij, uitgaande van de huidige situatie, de profielvakken kunnen worden versterkt en tevens een oplossing wordt geboden voor een aantal problemen bij wiskunde, in lijn met de voorstellen in de notitie. Ook voorziet dit alternatief in een aantrekkelijker N&T profiel, dat echt voorbereidt op bredere vervolgstudies.

Deze reactie wordt ondersteund door de NVON en de bètafederatie.

We menen hierdoor een constructieve bijdrage te hebben geleverd en hopen op een positieve reactie uwerzijds.

Hoogachtend,
bestuur NVvW, drs. M.P. Kollenveld, voorzitter

ONZE REACTIE OP DE NOTA

Inleiding

De gedachtenvorming rond de profielen en het studiehuis was vanaf het begin vooral inhoudelijk gemotiveerd. Achteraf kan men wellicht constateren dat er daardoor minder aandacht was voor de organisatorische kant van de zaak. Deze nota focust vooral op de organisatorische kant en mist daardoor de inhoudelijke argumenten.

Plannen maken kost tijd. De plannen zoals geformuleerd in de nota zijn gebaseerd op een situatie van enige tijd terug. Een situatie die nog volop in ontwikkeling was en is. Het gevaar is niet denkbeeldig dat uit maatregelen die pogen om de problemen van toen op te lossen, zonder dat deze maatregelen onderwijskundig onderbouwd zijn, nieuwe problemen kunnen voortvloeien.

In het volgende willen we aantonen dat deze plannen de problemen niet oplossen, maar juist veel nieuwe problemen met zich mee brengen.

Inhoudelijk - De plannen komen te vroeg

Een complexe onderwijskundige vernieuwing heeft tijd nodig. Het gaat om nieuwe vakinhouden, introductie van praktische opdrachten en keuzeonderwerpen. Nieuwe technologieën, zoals grafische rekenmachine en gebruik van de computer, doen bij wiskunde hun intrede. Dit alles brengt de noodzaak van een nieuwe didactiek met zich mee. Nu de organisatorische problemen inmiddels wat naar de achtergrond zijn verdwenen, ontstaat er ruimte voor de noodzakelijke inhoudelijke en didactische verbetering.
Op de vervolgopleidingen zijn de eerste lichtingen uit het studiehuis net aangekomen. Er is op dit moment nog geen echt evaluatieonderzoek mogelijk geweest naar de effecten op de aansluiting op vervolgopleidingen. Er is slechts een eerste indicatie. Het is veel te vroeg om nu al grote inhoudelijke wijzigingen door te voeren, zoals met name de verregaande reducties van de exacte vakken, die forse negatieve invloed zullen hebben op de aansluiting op het vervolgonderwijs.

Wij adviseren u om eventuele nog bestaande problemen binnen de bestaande structuur op te lossen.

Organisatorisch - De plannen komen te laat

Menige school heeft inmiddels de zaken organisatorisch wel op orde. Het Programma van Toetsing en Afsluiting (PTA) wordt elk jaar beter. Periodisering geeft ruimte om ook kleine vakken tot hun recht te laten komen. Verlichtingsmaatregelen, zoals de verruiming van de mogelijkheid voor het aanbieden van de deeltalen, hebben hun effect; dit probleem is in feite opgelost.
Ingrijpende veranderingen in de omvang van de vakken (met gevolgen voor de personeelsformatie) en de vergrote keuze-

mogelijkheden (met gevolgen voor het rooster) vergen weer veel organisatorische aandacht van de scholen die ten koste moet gaan van de noodzakelijke dringende aandacht voor het verbeteren van de kwaliteit van het onderwijs. Het demotiveert en verlamt de huidige ontwikkelingen en brengt ons voor jaren achterop.

Keuzes positief?
Er is veel onderzoek gedaan dat erop wijst dat leerlingen, als ze de keuze hebben, niet in de eerste plaats geneigd zijn om 'moeilijke keuzes' te maken. De vrienden, de docent, en de gepercipieerde moeilijkheid van een vak zijn van meer invloed dan een nog verre toekomst.
Kiezen is niet per se goed; het kan ook teveel zijn. Voor het profiel C&M in het vwo zijn er theoretisch bijvoorbeeld wel 1260 mogelijke vakken te kiezen! Namelijk: 7 (gemeenschappelijk deel, taal) × 6 (profieldeel, cultuurvak) × 3 (profieldeel, maatschappijvak) × 10 (2 vrij kiezen uit nog 5(?), schoolafhankelijk aantal).
Of dat de organiseerbaarheid ten goede komt, is niet a priori duidelijk. Vervolgopleidingen krijgen minder houvast. Scholen zullen daarom vaak de keuzeruimte voor leerlingen beperken. Die beperking kan dan beter binnen de totale structuur gebeuren; dat geeft helderheid voor de vervolgopleiding.

Overladenheid?
Leerlingen klagen niet zozeer meer over overladen programma's maar wel over de hoeveelheid productiewerk die van ze gevraagd wordt - vaak zonder afstemming tussen de vakken. Dit productiewerk is een gevolg van een nieuwe didactiek die zich nog moet ontwikkelen en waarvoor nog naar een evenwicht gezocht moet worden. De oplossing van dit soort overladenheid vraagt veel eerder een goede regie van de school dan een programmawijziging.
Voor docenten is de werkdruk vaak onverantwoord hoog geworden. De talendocent komt om in het correctiewerk en de wiskundedocent schreeuwt om meer contacttijd. Het is niet duidelijk hoe de plannen in de nota die problemen oplost. **De wiskundedocent zal vanwege de voorgestelde reducties, vergeleken met de situatie van vóór de 2e fase, bijna het dubbele aantal groepen te verwerken krijgen: een onaanvaardbare verzwaring waarover de nota ten onrechte zwijgt.**

Een oplossing binnen de huidige structuur - die we vaak hebben bepleit - is om intelligent om te gaan met de verschillen tussen de vakken en deze verschillen te vertalen in de toedeling van de contacttijd per vak als percentage van de studielast.

We geven hierbij als voorbeeld een vergelijking van twee vakken met een gelijke studielast: wiskunde en een taal. Wiskunde is een cumulatief vak, waarin je gemakkelijk het spoor bijster kunt raken: uit het een volgt het ander. Een taal is meer een lateraal vak, waar gelezen wordt, woordkennis wordt opgebouwd en taalvaardigheid geoefend, passief en actief. In onze visie krijgt de leerling de wiskundedocent vaker te zien dan de talendocent. De talendocent krijgt betaalde tijd om correctiewerk te verrichten in de tijd dat de leerling zelfstandig boeken leest, verslagen, samenvattingen of betogen schrijft en woordkennis opbouwt. De wiskundedocent krijgt betaalde tijd om de leerlingen te helpen bij het redeneren en abstraheren. Een onderdeel waarbij leerlingen elkaar nauwelijks kunnen helpen. Dat is motiverend voor alle partijen en komt de kwaliteit van het onderwijs ten goede.

Versnippering?
Er is veel voor te zeggen om vakken als gelijkwaardig te beschouwen. De redenering dat alle vakken daarom even groot moesten zijn in urenaantallen, is in de geschiedenis van het onderwijs nog niet eerder vertoond. In de nota wordt over een onderwijskundige onderbouwing hiervan niet gerept. Juist in een uitgebalanceerd programma met grote kernvakken en kleine bijvakken is een goede organisatie wel degelijk mogelijk, waarmee meer recht wordt gedaan aan de profielgedachte. In de notitie is de schijnbare winst voor de leerling met N&T één klein vakje minder, maar alle grote vakken worden kleiner: de versnippering neemt daarmee juist toe.

Aansluiting met het vervolgonderwijs?
Over de aansluiting met het vervolgonderwijs kunnen we kort zijn. Er zijn nog geen cijfers bekend over de resultaten van de 2e fase leerlingen in het vervolgonderwijs die een inhoudelijk besluit rechtvaardigen. Veel vervolgopleidingen beginnen eigenlijk nu pas te reageren op de nieuwe instroom. Het is overduidelijk dat een forse reductie van de bètavakken de aansluiting naar het technisch onderwijs en het bèta-onderwijs in het algemeen onaanvaardbaar ernstig verslechtert. Het vervolgonderwijs heeft dit inmiddels op niet mis te verstane wijze duidelijk gemaakt. We sluiten ons graag hierbij aan.
Het is wellicht nog scherper te formuleren: de voorgestelde reducties zullen ertoe leiden dat (in de huidige systematiek van lestoedeling) er nog slechts 2 lessen per week aan wiskunde worden besteed. Daarin is geen enkel programma goed uitvoerbaar en zeker niet een programma dat voorbereidt op een studie met bètacomponenten.

Samenhang, afstemming?

De profielstructuur is destijds mede ingevoerd om meer samenhang in de vakkenpakketten te krijgen; helder voor het vervolgonderwijs en helder voor de docenten die daardoor mogelijkheden kregen om binnen de profielvakken meer eenheid en samenhang te bewerkstelligen. Elke leerling binnen een bepaald profiel heeft goeddeels hetzelfde pakket. Universiteiten en hogescholen zetten in toenemende mate in op brede studies. In de nota wordt de rol van het profiel teruggedrongen en door de veelheid aan vakkenkeuzes zal daardoor de prikkel en de noodzaak tot samenwerking en integratie zo goed als verdwijnen. In ons alternatief doen we een poging zowel die samenhang binnen de profielen als de aansluiting op vervolg-onderwijs te verbeteren.

Onbegrijpelijke keuzes

Wij stellen dat er een aantal onbegrijpelijke keuzes gemaakt worden in de nota. Het overzicht hieronder is niet uitputtend.
- Bijna dagelijks zien we in de kranten dat de noodzaak van een inburgeringscursus voor immigranten wordt beleden. Tegelijkertijd wordt in deze nota het vak maatschappijleer - de ‘inburgeringscursus’ van onze eigen jeugd (een deel daarvan is allochtoon) - niet meer verplicht gesteld voor het merendeel van de leerlingen. In ons alternatief blijft maatschappijleer verplicht in het gemeenschappelijke deel.
- In het gemeenschappelijk deel van het vwo wordt voor dyslectische of bètaleerlingen het vak aardrijkskunde als alternatief geboden in plaats van een tweede taal. Er zijn ongetwijfeld nog meer groepen te detecteren (zoals allochtonen?). De vraag is echter of deze leerlingen daar iets mee opschieten. Waarom aardrijkskunde? Het introduceert een keuze in het gemeenschappelijk deel die niet helder is; de tweede taal is kennelijk toch niet zo belangrijk - die kan vervangen worden - hoewel de omvang weer heel groot is, groter dan de heeltaal nu, en groter dan Engels.
- Het zonder inhoudelijke noodzaak opblazen van kleine vakken als ckv2 of lo2 kan er toe leiden dat deze vakken nog maar op weinig scholen worden aangeboden. Dit is jammer, omdat deze vakken in een bescheidener omvang een interessante aanvulling van het programma kunnen zijn.
- Het vergroten van de vakken Latijn en Grieks is wellicht plezierig voor gymnasia, maar het kan op kleine scholengemeenschappen - met vaak maar weinig leerlingen voor dat vak - heel duur uitpakken. De vraag is of dat een bewuste keuze is.
- Het profiel N&G is niet meer eenduidig: een leerling met het profiel N&G met wiskunde A en bijvoorbeeld ckv en lo2 in de vrije ruimte, is formeel toelaatbaar tot dezelfde bètaopleidingen als een leerling met het profiel N&G met daarin wiskunde B en in de vrije ruimte voortgezette wiskunde en voortgezette natuurwetenschappen. De leerling, noch de vervolg-opleiding, is hierbij gebaat.
- Over de noodzaak om natuurkunde op te nemen in de beide bèta-profielen is ook elders veel opgemerkt. Deze inzichten onder-steunen we van harte. Samenhangend bèta-onderwijs kan niet zonder natuurkunde. In ons voorstel is natuurkunde versterkt opgenomen in het profiel N&G.
- Als gevolg van het nieuwe rigide systeem van gelijke vakken in de nota zal de vwo-leerling in het profiel C&M veel meer uren wiskunde krijgen, namelijk evenveel als de bètaleerling (die er volgens deze plannen veel minder zou krijgen). De argumentatie dat dan meer aandacht mogelijk is, kan moeiteloos worden overgebracht op de andere wiskundevakken: meer aandacht is meestal goed.

Zonder wiskunde naar de pabo?

In de nota wordt daarentegen voorgesteld het vak wiskunde te schrappen in het profiel C&M voor de havo, bij uitstek het profiel voor de pabo. Het is niet onverstandig als degene die de basisscholier rekenen leert daar ook zelf wat van kan. De rekendidactiek is sterk in ontwikkeling, maar als de leerkracht het zelf niet begrijpt, is dat vrij dramatisch. In ons alternatief is in dat probleem voorzien doordat elke leerling minstens de basiswiskunde heeft gevolgd. Dat laat onverlet dat we grote zorgen hebben over de rekenkwaliteit van de toekomstige leerkrachten nu veel pabo-leerlingen van het mbo komen met soms maar een minieme bagage aan wiskunde-kennis. Een forse inzet met betrekking tot het rekenen op de pabo is nodig, maar dat valt buiten deze nota.

Deelvakken afgeschaft?

Het afschaffen van deelvakken is één van de uitgangspunten van de nota. Voor wiskunde geldt tot onze verbazing dit algemene uitgangspunt niet: daar wordt het heelvak afgeschaft, het deelvak ingekrompen en tot heelvak gebombardeerd. In ons alternatief zullen ook de deelvakken verdwijnen, maar blijft de studielast voor wiskunde op peil, en is er meer ruimte voor de andere profielvakken.

Voortgezette wiskunde en voortgezette natuurwetenschappen

De gedachte om extra verdiepende vakken aan te bieden in de vrije ruimte in het vwo is aantrekkelijk, maar dat zou ook moeten gelden voor de havo. Ook daar zitten immers leerlingen met

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

een interesse voor exacte vakken. Dat mag evenwel niet ten koste gaan van het niveau in het reguliere profiel. Ook een profiel zonder verdiepende vakken moet voldoende voorbereiden op aansluitende vervolgopleidingen. Het is immers niet zeker dat elke school in staat zal zijn die verdiepende vakken aan te bieden. Ons alternatief voorziet daar wel in door binnen het profiel N&T al die verdieping (deels) aan te brengen.

Dubbel kiezen?

In de nota wordt de mogelijkheid tot verbreding geopperd door het aanbieden van de mogelijkheid om de vakken wiskunde A en wiskunde B beide te kiezen. Afgezien van het roosterprobleem (veel scholen hebben die keuze nu verboden), is het inhoudelijk niet goed mogelijk. De overlap is vrij groot omdat daarin de basiswiskunde - voor beide profielen noodzakelijk - is opgenomen. Gereduceerde programma's zoals aangegeven in de nota, kunnen niet ontworpen worden zonder een forse overlap. In ons alternatief is de mogelijkheid er wel om wiskunde A en wiskunde B beide te kiezen.

Wiskunde in de huidige 2e fase, het probleem van de omrekeningsformules

Wiskunde is een basisvak, misschien wel moeilijk voor sommigen, maar nuttig voor iedereen. Mede op aandrang van de Tweede Kamer is het vak daarom verplicht opgenomen in alle profielen. Om tegemoet te komen aan de verschillende eisen per profiel, variërend van gecijferdheid tot voorbereiding op een exacte studie, is de vakinhoud bepaald. De studielast is per profiel verschillend naar rato van het belang van het vak binnen een profiel. De programma's zijn grotendeels afgeleid van eerdere programma's. Toch wordt er geklaagd. Hoe komt dat?
De reden hiervan ligt vooral in de systematiek van lessentoedeling zoals deze op veel (bijna alle) scholen gehanteerd wordt. Hierdoor wordt de nieuwe benadering van studielast als tijd die een leerling aan een vak besteedt, via een simpele formule voor alle vakken omgerekend tot de oude situatie van lessen (contacttijd) door de docent gegeven. Uit onderzoek is al vaker gebleken: leerlingen presteren bij wiskunde het best als er in de klas veel zinvolle interactie is. Samen problemen bespreken en oplossingsmethoden vergelijken blijken veel bij te dragen aan een beter begrip van soms complexe, abstracte zaken. Leerlingen krijgen daarvan nu vaak te weinig en daarmee doe je ze tekort. De theoretische studielast wordt zo op geen stukken na gehaald.

Het is ook niet eerlijk: als men vindt dat iedereen wiskunde moet doen, ook de minder getalenteerden (*), moet er ook voor gezorgd worden dat daar voldoende contacttijd tegenover staat. Een netto contacttijd, minstens 50% van de studielast, is volstrekt noodzakelijk. Dat zou, net als bij lichamelijke opvoeding, in de regelgeving moeten worden vastgelegd. Scholen durven immers zelf die differentiatie tussen vakken vaak niet aan.

(*) Juist bij minder getalenteerden doet zich vaak het verschijnsel wiskunde-angst (math anxiety of math phobia) voor: een complex van zichzelf versterkende psychische processen die voor een complete blokkade, een zichzelf afsluiten voor het vak, kunnen zorgen. De aanwezigheid van een goede docent kan veel goedmaken. Veel zelfstandig werken met een antwoordenboekje versterkt dit probleem.

Grote verschillen tussen scholen

Met betrekking tot contacttijd zijn de verschillen tussen scholen onaanvaardbaar groot. Na het eindexamen in mei 2002 heeft de NVvW een kleine enquête gehouden over de relatie tussen contacttijd en examenresultaat. Daaruit bleek dat bijvoorbeeld voor het vwo-profiel N&T (760 slu) de contacttijd uiteenliep van 3 keer 3 lesuren (in de klassen 4, 5 en 6) tot 3 keer 5 lesuren. Dat betekent een contacttijd van netto 30% tegen respectievelijk 50%. De resultaten waren zoals verwacht kon worden. Met 50% contacttijd was een goed resultaat mogelijk, met 30% niet. Natuurlijk zijn er meer zaken van invloed op het examenresultaat voor wiskunde, maar onder een bepaald minimum aan contacttijd zadel je ook de beste docenten en leerlingen op met een onmogelijke opdracht. Leerlingen van verschillende scholen hebben hierdoor ongelijke kansen voor het examen en dat is principieel onjuist.

Overladen? Niet te zeggen

Door het grote verschil in contacttijd (veel groter dan voor de 2e fase) tussen de verschillende scholen staat de discussie over de programmatische overladenheid bij wiskunde op losse schroeven. In de verslagen en monitoringen mist tot nu toe steeds node een duiding van waaruit mensen tot hun oordeel kwamen, gerelateerd aan de toegekende contacttijd, want dat bepaalt het beeld in hoge mate. Met 50% reële contacttijd zouden de programma's naar onze mening redelijk uitvoerbaar moeten zijn. Met eenzelfde percentage op alle scholen is in elk geval een echte discussie mogelijk omdat je het over hetzelfde hebt.

Los daarvan is er op basis van de ervaringen van de afgelopen jaren

wel grond voor enige aanpassingen van het programma. De diverse verlichtingsmaatregelen hebben het programma niet evenwichtiger gemaakt, de invloed van ICT is merkbaar. Heroverweging is nodig.

Uiteraard is de NVvW gaarne bereid om haar bijdrage te leveren aan een haalbaar programma in de beschikbare tijd.

N.B.
Als het percentage van 50% contacttijd in de toekomst niet gehaald wordt, zou het wiskundeprogramma ook in de huidige situatie moeten worden gereduceerd. Met de voorgenomen reducties zal men rekening moeten houden met een *halvering* van de inhoud van het huidige programma. Zoals eerder gezegd lijkt het ons niet mogelijk om daarmee ook maar een illusie van aansluiting op het vervolgonderwijs te bewerkstelligen.

Samenvattend
De NVvW ziet niets in de voorstellen zoals die geformuleerd zijn in de nota 'Ruimte laten en keuzes bieden' van januari 2003. We willen u adviseren de gemaakte keuzes in het licht van de huidige realiteit te heroverwegen en niet meer overhoop te halen dan strikt noodzakelijk is. Handhaaf de profielen op de huidige omvang. Geef ons de tijd om het onderwijs verder vorm en inhoud te geven.

In de bijlage presenteren we een mogelijk alternatief binnen de huidige situatie, waarbij de profielvakken kunnen worden versterkt, de studielast voor wiskunde gehandhaafd blijft en een aantal van de problemen bij wiskunde en de exacte vakken wordt aangepakt in lijn met de voorstellen uit de notitie en eerdere reacties van het vervolgonderwijs.

We hopen hiermede een voorbeeld van een werkbaar alternatief te leveren dat binnen de huidige structuur een aantal problemen aanpakt en zijn uiteraard altijd gaarne bereid in een gesprek ons standpunt nader toe te lichten.

Dit alternatieve voorstel wordt ondersteund door de NVON, de vereniging van leraren in de natuurwetenschappelijke vakken, met een voorbehoud wat betreft de plaats van ANW.

BIJLAGE
Een elegant en werkbaar alternatief

Hieronder presenteren we een alternatief waarbij de profielvakken worden versterkt, de totale studielast voor wiskunde gelijk blijft en een aantal van de problemen bij wiskunde en de exacte vakken wordt aangepakt.

Kenmerken
- Versterking van de profielen (robuuste profielen)
- In elk profiel 4 vakken van voldoende omvang (mogelijkheden voor samenhang en integratie van vakken)
- Meer ruimte voor de profielvakken Natuur- en scheikunde versterkt in het profiel N&G
- Beperkte keuze binnen een profiel waardoor een samenhangend pakket aangeboden kan worden dat helder is voor vervolgopleidingen
- Geen deelvakken
- Studielast voor wiskunde gehandhaafd
- Een attractief N&T profiel voor iedereen (helder voor vervolg)
- Mogelijkheid voor verbreding: keuze wiskunde A en B
- Mogelijkheid voor verdieping: WINAS2 in de vrije ruimte

Voorstel
In dit voorstel wordt ter illustratie uitgegaan van het aantal uren in het vwo.
- De studielast van het vak ANW (200 uur) in het gemeenschappelijk deel wordt toegevoegd aan natuurkunde en scheikunde in het profiel N&G. Dat profiel zou dan te groot worden. Haal daarom eenzelfde aantal uren wiskunde eruit en verplaats dat naar het gemeenschappelijke deel in de vorm van een basisdeel wiskunde. Dit geeft *in elk profiel* 200 uur ruimte en het kan goeddeels de overlap tussen wiskunde A en B wegnemen.
- In het gemeenschappelijk deel komt dan een basisdeel wiskunde (BW) van 200 uur. Dit kan geheel in de vierde klas worden geplaatst en eventueel afgesloten met een schoolexamen. Dat geeft 200 uur ruimte in het profiel C&M. Het is mogelijk te besluiten dat dit voldoende bagage is voor die leerlingen in het profiel C&M vwo (en/of havo), voor wie meer wiskunde in een vervolgopleiding geen rol speelt. Elke leerling heeft op deze manier immers het basispakket wiskunde gevolgd. In het profiel C&M vervalt daarmee wiskunde A1, waardoor ruimte ontstaat voor de vier overige vakken. De versnippering wordt minder en wiskunde A12 kan altijd nog gekozen worden.
- In het profiel E&M komt het vak wiskunde A met 400 uur. Hierdoor ontstaat ruimte voor de vakken geschiedenis en aardrijkskunde. De versnippering wordt daardoor minder.

- In het profiel N&G komt het vak wiskunde B met 400 uur. De vrijgekomen 200 uur kunnen worden gebruikt om het verschil tussen heel- en deelvak bij natuur- en scheikunde te overbruggen.
- In het profiel N&T is nog meer mogelijk. Als hier dezelfde wiskunde B komt als in het profiel N&G, levert dat nog 160 uur extra op. De ruimte van 360 uur kan worden gebruikt om het combinatievak voortgezette wis- en natuurwetenschappen 1 (WINAS1), in die omvang een volwaardig vak, binnen het profiel te halen.

De hierboven voorgestelde constructie kan ook vertaald worden naar de havo. Alle getallen worden dan globaal met $\frac{2}{3}$ vermenigvuldigd.

Toelichting bij het voorstel

Aanleiding is de enigszins mislukte positionering van het vak ANW. Ooit bedoeld als enthousiasmerend vak en voorbereidend op een profielkeuze, is de huidige praktijk dat het vak tegelijk met natuur- en scheikunde wordt aangeboden nadat de profielkeuze heeft plaats gevonden. Voor bètaleerlingen is het vak ANW in de huidige situatie vaak dubbelop, terwijl voor alfaleerlingen dit vak nou juist het vak is dat ze niet gekozen hebben. In de nota wordt de verkeerde positionering nog versterkt door te stellen dat alleen leerlingen die géén natuurprofiel gekozen hebben verplicht ANW volgen. Het vak krijgt daarmee een levertraanfunctie, de bedoeling van het vak wordt onderuitgehaald.

De oorspronkelijke functie van voorbereidend, enthousiasmerend en breed oriëntatievak zou het o.i. wel kunnen krijgen als het vak ANW in de onderbouw, zeg 3e klas, gepositioneerd zou worden. Dan is het voor alle leerlingen, voor de profielkeuze. En is er nog wat te winnen.

WINAS is daarbij als het ware complementair, aan het eind van de opleiding, op een hoger niveau.
We realiseren ons dat we hiermee een nieuw punt in de discussie brengen. Op deze manier is ANW nog niet eerder ter sprake gebracht. Een discussie over voor- en nadelen is nog niet gevoerd. Hierin ligt het voorbehoud van de NVON. Dit valt echter buiten het bestek van deze notitie.

Toelichting bij de vakken WINAS1 en WINAS2

Het nieuw te ontwikkelen vak WINAS1 bevat uiteraard een forse wiskundecomponent (50%), maar het kan breder worden ingevuld als voorbereiding op de bredere benadering van de bachelor in het vervolgonderwijs. Leerlingen vinden dat interessant. Te denken valt aan een thematische invulling waar binnen een thema diverse aspecten van wis- en natuurwetenschappen aan de orde komen. Samenwerking tussen verwante vakken ligt dan in de lijn. Bij de invulling van dit vak is de deskundige medewerking van het vervolgonderwijs onontbeerlijk. De bereidheid hiertoe is herhaaldelijk getoond. Hierdoor kunnen en passant de communicatie en de aansluiting ongetwijfeld verbeterd worden.
Het aantal thema's, de variatie daarin, de keuzevrijheid en al dergelijke zaken komen later aan de orde.
Belangrijk is dat een goede actuele invulling van dit vak het profiel N&T veel aantrekkelijker zal kunnen maken voor de leerling én de docent. In onze visie zal een dergelijk vak niet afgesloten worden met een (statisch) centraal schriftelijk examen. Dat dooft de dynamiek. Het toetsen van dit vak zal onder de verantwoordelijkheid van de school vallen, waarbij voor een kwalitatieve borging de deskundige inbreng van het vervolgonderwijs niet uitgesloten is.

Voor het vrije deel wordt het vak voortgezette wis- en natuurwetenschappen 2 (WINAS2) ontwikkeld. Hierin kan de vrijheid en de onderwerpkeuze nog veel groter zijn.

Overigens passen deze nieuwe vakken volgens ons ook prima binnen de gedachten die breder leven: bij vervolgopleidingen, AXIS en Jet-Net.

Ten slotte

In ons voorstel zijn de verschillen met de huidige situatie niet zo groot. Het ligt meer in de lijn van een logische bijstelling waarvan, in tegenstelling tot de plannen in de nota, geen verlammende werking uitgaat en die geen afwachtende houding van de onderwijsgevenden uitlokt. Het demotiveert niet de docenten exacte vakken. De schoolorganisatie kan goeddeels hetzelfde blijven. Een voorbereiding op de gezamenlijk vorm te geven combinatievakken WINAS1 en 2 kan juist stimulerend werken, mits daarvoor natuurlijk wat stimuli worden uitgedeeld.

Examenbesprekingen 2003

[Conny Gaykema]

Zoals gebruikelijk organiseert de NVvW ook dit jaar weer een aantal examenbesprekingen.
Hieronder staan de data, plaatsen en de voorzitters van deze regionale besprekingen. Het telefoonnummer van de school en van de voorzitter staat tussen haakjes.

VMBO TGK

maandag 26 mei 2003
15.00-17.00u

ALKMAAR
OSG Willem Blaeu, Robonsbosweg 11
(072-5122477)
mw. R. Deelen–van Os (0227-602058)

BURGUM
CSG Liudger, Tj.H. Haismastraat 1
(0511-460260)
mw. G. Tack-Althof (058-2572388)

GRONINGEN
Noorderpoort College,
Van Schendelstraat 1
(050-5297329)
dhr. J. Rijnaard (050-5254709)

ROTTERDAM
GSG Randstad, Valenciadreef 15
(010-4552511)
NS Alexanderpolder
dhr. W. de Jager (0184-683829)

ZEIST
KSG De Breul, Arnhemsebovenweg 98
(030-6915604)
dhr. B. Nieuwenhuis (0345-558355)

ZWOLLE
Thorbecke SG, Dr. C.A. van Heesweg 1
(038-4564540)
dhr. R. Kronenberg (038-4210044)

VMBO BB

maandag 26 mei 2003
15.00-17.00u
Jaarbeurs, Utrecht (Beatrixgebouw)
dhr. J. Akkermans
Voor vmbo BB is er één landelijke bijeenkomst. Deze bijeenkomst is alleen toegankelijk voor leden van de NVvW.
Aanmelding voor deelname aan deze bijeenkomst kan plaats vinden via de website van de NVvW (*www.nvvw.nl*).

HAVO-A12

dinsdag 27 mei 2003
16.00-18.00u

HAVO-B1/B12

donderdag 22 mei 2003
15.30-18.00u

AMERSFOORT
SG Guido de Brès, Paladijnenweg 251
(033-4792900)
A: dhr. A.B. v.d. Roest (0318-543167)
B: dhr. F. van den Heuvel (030-2730898)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert, De Cuserstraat 3
(020-6423902)
CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51
A: dhr. H.G.J. Rozenhart
(072-5716448)
B: dhr. S.T. Min (0229-237756)

's-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum, Colijnplein 9
(070-3687670)
A: dhr. J.P.C. van der Meer
B: dhr. J. Remijn (070-3684525)

GRONINGEN
Röling College, Melisseweg 2
(050-5474141)
A: mw. O. Eringa (0512-519160)
B: mw. H. Lüder (0516-432889)

'S-HERTOGENBOSCH
Ds. Pierson College, G. ter Borchstraat 1 (073-6442929)
NS Den Bosch-OOST
A: dhr. W.J.M. Laaper (040-2867720)
B: dhr. C.J.M. Nienhuis (0411-611718)

ROTTERDAM
GSG Randstad, Valenciadreef 15
(010-4552511)
NS Alexanderpolder
A: dhr. R.E. Houweling (0180-315302)
B: mw. A. de Jongh Swemer
(010-4138432)

ROZENDAAL (bij Velp)
Het Rhedens, Kleiberglaan 1
(026-3646845)
A: mw. A.W.M. Tromp (026-3254829)
B: dhr. A.T. Sterk (055-3666466)

ZWOLLE
Van der Capellen SG, Lassuslaan 230
(038-4225202)
A: dhr. A. Ebbers (0341-252202)
B: dhr. J.P. Scholten (053-4768791)

VWO-A1/A12

maandag 2 juni 2003
15.30-18.00u

VWO-B1/B12

maandag 26 mei 2003
15.30-18.00u

AMERSFOORT
SG Guido de Brès, Paladijnenweg 251 ()
A: dhr. F.O. van Leeuwe
(0341-492843)
B: dhr. F.W. Zwagers (033-4752341)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert, De Cuserstraat 3
(020-6423902)
CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51
A: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)
B: dhr. R. Stolwijk (072-5325551)

Nieuws van het WereldwiskundeFonds



[Ger Limpens]

Nieuwe aanvragen

Vanaf januari 2003 kunnen weer nieuwe aanvragen worden ingediend voor projecten van het Wereldwiskunde Fonds (WwF). Het WwF stelt zich ten doel het wiskundeonderwijs in derdewereldlanden te ondersteunen door middel van financiële bijdragen aan nader te bepalen projecten en tevens wiskundedocenten 'hier' te laten zien dat er 'daar' ook collega's zijn die zich met soortgelijke maar ook met heel andere vragen en problemen bezig houden dan zij zelf.
Er kunnen elk voorjaar nieuwe aanvragen voor ondersteuning ingediend worden. Uit die aanvragen kiest de werkgroep een of twee projecten.
Criteria voor het toekennen van subsidies zijn:
- alleen projecten in derdewereldlanden;
- zichtbare ondersteuning;
- voorkeur voor projecten in het voortgezet onderwijs;
- projecten die een vervolgproject kunnen krijgen hebben een pre;
- betrouwbaarheid en goede communicatie spelen een grote rol bij toekenning.

Bent u betrokken bij zo'n project of kent u iemand die dat is, dan kunt u een aanvraag indienen bij de secretaris van het Wereldwiskunde Fonds:
Gerben van Lent, Jufferstraat 292, 3011 XM Rotterdam, tel. 010 452 4556 (e-mailadres: *jonglent@worldonline.nl*)
U kunt de aanvraag het beste eerst even met hem doorspreken.
Aanvragen moeten steeds vóór 15 mei binnen zijn.

Nieuwe werkgroepleden gezocht

Verder wil ik namens de werkgroep van het WwF bij dezen een oproep doen voor nieuwe werkgroepleden. Dat zouden wiskundedocenten moeten zijn met affiniteit met of (werk)ervaring in de Derde Wereld. De investering in tijd is relatief gering: wij hebben ongeveer vier gezamenlijke bijeenkomsten per jaar, meestal in de namiddag. Verder wordt van leden verwacht dat zij contact houden met geworven projecten en meewerken aan artikelen. Reiskosten worden door de NVvW vergoed. Geïnteresseerden kunnen zich ook weer tot onze secretaris (zie boven) wenden voor verdere informatie.

'S-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum, Colijnplein 9
(070-3687670)
A: dhr. C.D. Hendriks (0174-620131)
B: dhr. R.J. Klinkenberg (070-3559938)

GRONINGEN
Röling College, Melisseweg 2
(050-5474141)
A: dhr. I. Osinga (050-5291250)
B: dhr. W.H.V. de Goede (050-5013342)

'S-HERTOGENBOSCH
Ds. Pierson College, G. ter Borchstraat 1 (073-6442929)
NS Den Bosch-OOST
A: vervalt; geen gespreksleider
B: dhr. H.J. Kruisselbrink (073-5216386)

ROTTERDAM
GSG Randstad, Valenciadreef 15
(010-4552511)
NS Alexanderpolder
A: dhr. D.A.J. Klingens (0180-514485)
B: dhr. C. Rijke (078-6194286)

ROZENDAAL (bij Velp)
Het Rhedens, Kleiberglaan 1
(026-3646845)
A: dhr. L.H. Rietveld (055-5419287)
B: dhr. J.M. de Geus (0575-521442)

ZWOLLE
Van der Capellen SG, Lassuslaan 230
(038-422520)
A: dhr. C.P.J. Coenen (0527-201665)
B: dhr. H. Schutjes (0529-427306)

[Frits Göbel]

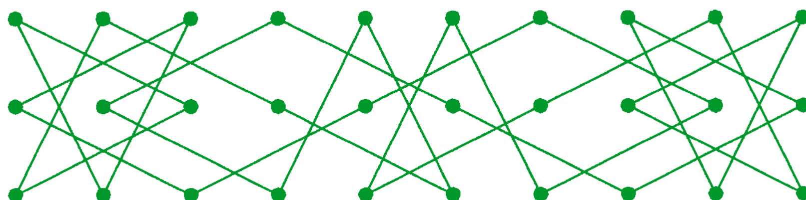
Puzzel 6 - Paard zonder grenzen

Het paard van het schaakspel heeft al menigeen tot recreatieve opgaven geïnspireerd. Denk maar aan het probleem om een paard zó op het schaakbord te laten rondspringen dat in 64 zetten ieder veld wordt aangedaan.
Fred Schuh neemt in zijn boek ‘Wonderlijke Problemen’ (1943) ook borden van andere afmetingen onder de loep. In figuur 1 zien we één van zijn oplossingen voor een bord van 3 bij 10. De velden zijn hier weergegeven door punten. Dit geeft meteen de mogelijkheid om, voor de niet-schakers, te vertellen hoe het paard zich beweegt: bij een zet gaat het steeds naar één van de punten op (Euclidische) afstand $\sqrt{5}$ (als de roosterafstand 1 is).

Opgave 1
Bepaal $P(-17, 18)$.

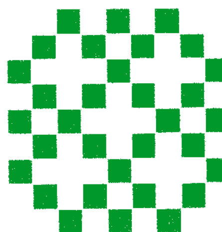
Opgave 2
Bepaal het aantal reeksen van vier zetten dat het paard van (0, 0) naar (2, 2) brengt.

Je kunt je ook afvragen hoe vaak een bepaalde waarde van $P(x, y)$ voorkomt.
Laat $f(n)$ het aantal roosterpunten zijn met $P(x, y) = n$. Dus $f(0) = 1$, $f(1) = 8$, $f(2) = 32$. Dit laatste getal is af te lezen in figuur 2 waar de punten nu weer als velden zijn getekend.



FIGUUR 1

FIGUUR 2



Voor de variatie wil ik het nu eens hebben over een schaakbord dat zich in alle richtingen oneindig ver uitstrekt. Het paard beweegt zich dan in de verzameling van alle roosterpunten van het vlak. En in plaats van rond-wandelingen bekijken we afstanden, gerekend in paardzetten. Dat wil zeggen: de afstand van twee punten (of velden) is het kleinste aantal zetten waarin een paard van het ene naar het andere punt kan komen.
We gaan nu aan ieder roosterpunt (x, y) een getal $P(x, y)$ toekennen, nl. de afstand van de oorsprong (0, 0) naar (x, y).
Een paar voorbeelden:
$P(2, 1) = 1$, $P(1, 0) = 3$, $P(2, 2) = 4$

Opgave 3
Bepaal $f(10)$.

Om enig gevoel te krijgen voor het gedrag van de functies P en f is het aan te bevelen $P(x, y)$ te bepalen voor enkele tientallen punten. Hierbij is het handig om een sjabloon te gebruiken. Veel succes!

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen voor goede oplossingen. De deadline is deze keer 8 mei 2003.

Oplossing van 'Kwadraten'

Opgave 1
De oplossingen zijn (32, 49), (33, 99), (36, 54, 96), (37, 44), (42, 69) en (64, 98).

De meeste inzenders gebruikten de computer, maar de opgave is heel goed met de hand (en een rekenapparaatje) te doen. Er zijn $99 - 32 + 1 = 68$ gevallen te onderzoeken, dat zijn dus 2278 paren. Maar omdat twee getallen alleen dan gelijke cijferinhoud kunnen hebben als hun restklassen modulo 9 gelijk zijn, kun je 75% op het rekenwerk besparen! Immers n^2 mod 9 kan de waarden 0, 1, 4, 7 aannemen; n is in het eerste geval een drievoud (dat zijn 23 waarden tussen 31 en 100), terwijl n in de andere drie gevallen 15 waarden aanneemt. Het aantal te onderzoeken paren is dan slechts $253 + 3 \times 105 = 568$.

Opgave 2
Het aantal k-de machten van c cijfers neemt exponentieel toe met c; dit geldt voor ieder grondtal. Anderzijds geldt: de cijferinhoud van iedere macht (en trouwens ook van ieder getal) van c cijfers is een ongeordend c-tal uit de verzameling $\{0, 1, ..., g-1\}$; dus het aantal 'echte' mogelijkheden is zéker kleiner dan het aantal herhalingscombinaties van c uit g, te weten

$$\binom{g+c-1}{c}$$

Dit aantal is slechts een veelterm in c. Dus naarmate c groter wordt, kunnen we meer oplossingen verwachten.

Deze opgave heeft de inzenders veel hoofdbrekens gekost. Twee inzenders hebben (op beschaafde wijze) geprotesteerd tegen de vage formulering, die ik overigens met opzet heb gekozen. De meesten beperkten zich tot een kwalitatieve analyse, eventueel vergezeld van numerieke resultaten. Alleen Wobien Doyer kwam tot bovenstaand asymptotisch resultaat.

Opgave 3
Er zijn twee oplossingen: 157 en 913, met kwadraten van 5 respectievelijk 6 cijfers.

Ook deze opgave is heel goed met de hand te doen, zeker als je opmerkt dat n alleen een 9-voud $+ 4$ kan zijn. Dan blijkt meteen dat er niet *drie* opvolgende getallen bestaan waarvan de kwadraten gelijke cijferinhoud hebben, en dat geldt in ieder talstelsel (behalve het binaire).

Opgave 4
Een voorbeeld van zo'n oneindige rij is $4 \cdot (7^{2k} + 1)$ met $k > 0$.

Sommigen stuurden meerdere oplossingen in. Bijna iedereen gebruikte een computer.
Hoe kom je op zo'n rij als je géén computer hebt? Bijvoorbeeld aldus. Als het grondtal g van de vorm $n^2 - 1$ is, dan is $n^2 = g + 1$, dus $n^2 = 11$ in het g-tallig stelsel. Iets minder flauw: als g zodanig is dat n g-tallig wordt geschreven als dd, dan is $n^2 = gd + d = (g + 1)d$.
Neem nu $g = 7$.
De vergelijking $n^2 = 8d$ heeft dan als enige oplossing met $0 < d < 7$: $d = 2$, $n = 4$. Als je nu denkt aan de gedaante van een getal als 10001^2, dan ligt het voor de hand om $n = 4 \cdot (7^k + 1)$ te proberen. Het kwadraat hiervan ziet er dan, 7-tallig, zó uit:
2200.........04400.........022
Nu moeten we er alleen nog voor zorgen dat het aantal nullen even is in ieder van de twee rijtjes nullen. Nodig en voldoende hiervoor is: k is even, waarmee bovenstaande voorbeeldrij verkregen is.

De ladderstand is op dit moment:
L. de Rooij 77
H. Verdonk 69
P. Stuut 61
T. Afman 55
W. Doyer 40
L. v.d. Brom 32
D. Buijs, S. van Dijk, H. Linders 20
P. Meijer 17
T. Kool 16
Th. Buurman 1

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
7	26 mei 2003	1 april 2003
8	26 juni 2003	13 mei 2003

donderdag 24 april
3e Conferentie ICT in de wiskundeles
APS, Utrecht
Zie ook p.041 in Euclides 78-1

vrijdag 25 april
Nijmeegs Colloqium Didactiek van Wiskunde
KUN, Nijmegen
Zie ook p.120 in Euclides 78-3

do. 1 mei en vr. 2 mei
Nederlands Mathematisch Congres 2003
Organisatie KUN, Nijmegen
Zie ook p.161 in Euclides 78-4

vrijdag 9 mei
Opendag voor wiskundeleraren
Korteweg-de Vries Instituut, Amsterdam

zaterdag 17 mei
Symposium IX, Utrecht
Organisatie HKRWO
Zie ook p.161 in Euclides 78-4

vr. 22 en za. 23 augustus, Amsterdam
vr. 29 en za. 30 augustus, Eindhoven
Vakantiecursus 2003
Organisatie CWI

Examens
di. 20 mei – havo B1/B12
wo. 21 mei – vmbo BB
do. 22 mei – vmbo TGK, vwo B1/B12
vr. 23 mei – havo A12
di. 27 mei – vwo A1/A12

Regionale examenbesprekingen
do. 22 mei – havo B1/B12
ma. 26 mei – vmbo BB (alleen te Utrecht, alleen voor NVvW-leden)
ma. 26 mei – vmbo TGK, vwo B1/B12
di. 27 mei – havo A12
ma. 2 juni – vwo A1/A12
Zie verder pp.300-301 in dit nummer

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/Agenda2.html*



Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*



OP WEG NAAR ZELFSTANDIG LEREN MET

PASCAL

WISKUNDE

- Pascal geeft zelfstandig leren structuur en houvast
- Werkschrift maakt eigen schrift leerling overbodig
- Werkschrift is leermiddel en naslagwerk tegelijk
- Meerdere leerroutes mogelijk
- Differentiatie duidelijk zichtbaar in informatieboeken en verschillende werkschriften
- Doorlopende leerlijn tweede fase en leerwegen

Meer informatie
T (0575) 59 49 94
I www.pascal-online.nl
E pascal@thiememeulenhoff.nl

thiememeulenhoff



Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen

Telefoon (050) 522 63 11
Fax (050) 522 62 55
E-mail: netwerk@wolters.nl
www.netwerk.wolters.nl

Netwerk



een glasheldere formule



NIEUW!

Kennismaken met de 3e editie?

Neem dan contact op met onze voorlichter Sandra Kooijstra en reserveer alvast beoordelingsexemplaren.

Wolters Noordhoff